

LECCIÓN INAUGURAL
CURSO 2014-15

Tecnologías de la Información
Geométrica.
Aplicaciones en
Informática Gráfica y Geomática

FRANCISCO RAMÓN FEITO HIGUERUELA



UNIVERSIDAD DE JAÉN

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
GEOMÉTRICA.
APLICACIONES EN
INFORMÁTICA GRÁFICA Y GEOMÁTICA

*Lección inaugural pronunciada por el
Prof. Dr. D. Francisco Ramón Feito Higuera
Catedrático de Universidad del Área de Lenguajes y Sistemas Informáticos
en el acto académico celebrado en el mes de septiembre de 2014,
con ocasión de la solemne apertura del curso,
presidida por el Rector Magnífico
Prof. Dr. D. Manuel Parras Rosa*

FRANCISCO RAMÓN FEITO HIGUERUELA

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN
GEOMÉTRICA.
APLICACIONES EN
INFORMÁTICA GRÁFICA Y GEOMÁTICA

2014



UNIVERSIDAD DE JAÉN

© Universidad de Jaén
© Autor

Publicaciones de la Universidad
Vicerrectorado de Extensión Universitaria, Deportes y Proyección Institucional
Universidad de Jaén

ISBN
978-84-8439-860-8

Depósito Legal
J-381-2014

Impreso por
Gráficas La Paz

Impreso en España

Printed in Spain

A mi familia:

La que ya tengo en el cielo, la que
tengo en la tierra y la que aún está
en la mente de Dios.

CONTENIDO

Presentación	13
1. Introducción	15
2. Tecnologías de la Información Geométrica	21
2.1 Modelización	22
2.2 Geometría	26
2.3 Algoritmos Geométricos	30
3. Aplicaciones	37
3.1 Informática Gráfica	39
3.2. Geomática	51
Conclusiones	61

*Magnífico Sr. Rector de la Universidad de Jaén,
Dignísimas autoridades,
Miembros de la Comunidad Universitaria,
Señoras, Señores,
Queridos amigos*

Hoy comenzamos oficialmente un nuevo curso, y he tenido el honor de ser propuesto por el Rector Magnífico, D. Manuel Parras Rosa, para impartir esta lección inaugural. Es la primera vez que se imparte sobre Informática, lo que indica la juventud de esta Ingeniería que tantos y tan extraordinarios servicios nos está aportando.

Este curso hará 20 años que unos cuantos profesores constituíamos el primer grupo de investigación en Informática de la Universidad de Jaén, el grupo de Informática Gráfica y Geomática [www01]. Actualmente existen 4 grupos de investigación, y por el trabajo y esfuerzo de todos hemos conseguido situarnos en el 2º lugar en España en productividad investigadora [www02]. Así mismo la Universidad de Jaén está entre las 100 primeras mundiales, en Computer Science, según el índice de Shanghai. Estos logros suponen si cabe un mayor reconocimiento al esfuerzo realizado, teniendo en cuenta la menor financiación de nuestra Universidad, en el contexto andaluz, respecto de otras nacionales e internacionales, así como la inexistencia de un entorno empresarial avanzado que hubiese podido colaborar más en investigación aplicada.

Lo anterior indica que es una buena ocasión para que esta lección verse sobre esta disciplina. Por otro lado, estoy plenamente convencido de que la investigación es parte esencial de una Universidad y por tanto una Universidad que no dedique una gran parte de sus energías a ello no puede llevar tal nombre. Eso no significa que todo docente tenga que ser un gran investigador o viceversa, eso es claro, pero una Universidad que no se empeñe en avanzar en investigación no podría continuar ofreciendo una docencia de calidad. Vienen bien aquí las palabras de filósofo Gabriel Marcel: “Si uno no vive como piensa, acabará pensando como vive”. Si no dedicamos tiempo y medios a la investigación, incluida también la investigación sobre la docencia de nuestra disciplina, acabaremos pensando que la investigación no sirve para nada o que no merece la pena dedicarle el más mínimo esfuerzo. Pero simultáneamente tenemos que ser buenos profesores. ¿Y qué significa esto?: “Sin excepción, los profesores extraordinarios conocen su materia extremadamente bien. Todos ellos son consumados eruditos, artistas o

científicos en activo. Algunos poseen una impresionante lista de publicaciones de las que más aprecian los académicos. Otros presentan registros más modestos; o en algunos casos, prácticamente ninguno en absoluto. Pero ya sea con muchas publicaciones o no, los profesores extraordinarios están al día de los desarrollos intelectuales, científicos o artísticos de importancia en sus campos, razonan de forma valiosa y original en sus asignaturas, estudian con cuidado y en abundancia lo que otras personas hacen en sus disciplinas, leen a menudo muchas cosas de otros campos (en ocasiones muy distantes del suyo propio) y ponen mucho interés en los asuntos generales de sus disciplinas: las historias, controversias y discusiones epistemológicas. En resumen, pueden conseguir intelectual, física o emocionalmente lo que de ellos esperan sus estudiantes” [Bai07].

De ahí que avanzar en docencia y en investigación tiene que ser una de las metas que todos nos marquemos para este nuevo curso, ya que de eso seguro que además se derivará un mejor desarrollo social de nuestro entorno.

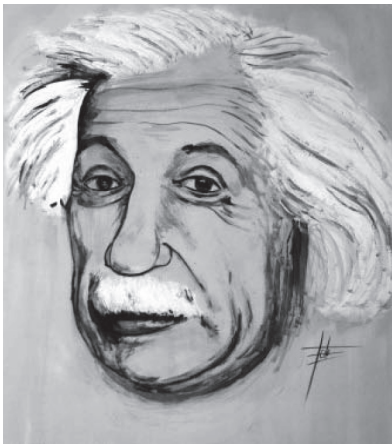


Figura 1. Einstein (cuadro de J.L. Feito)

Con 37 años dedicados a la docencia, (12 en los niveles preuniversitarios), creo que puedo hablar con una cierta autoridad. Por ello transmito a mis estudiantes algo que siempre he intentado tener presente, algo que Einstein recordaba: “Debe evitarse hablar a los jóvenes del éxito como si se tratase del principal objetivo en la vida. La razón más importante para trabajar en la escuela y en la vida es el placer de trabajar, el placer de su resultado y el conocimiento del valor del resultado para la comunidad”. De hecho, unas recientes declaraciones de Nicholas Negroponte [www03], investigador del MIT, avalan estas afirmaciones. El conocimiento no puede ser un fin en sí mismo. Según él en 30 años el sistema de aprender habrá cambiado. Bastará tomar píldoras de conocimiento que por el torrente sanguíneo llegarán al cerebro, a los lugares adecuados. ¿Ciencia ficción, pura ilusión? Habrá que esperar.

Pasemos ya, sin más dilación, a introducir el tema elegido, teniendo en mente desde el principio que debido a la propia extensión de la Disciplina todo lo que aquí se presenta no puede considerarse más que una somera introducción de una pequeña parte de ella.

1. INTRODUCCIÓN

De todos es conocida la expresión “Tecnologías de la Información y la Comunicación” (TIC) que hace referencia, en general, a todo el conjunto de tecnologías relacionadas con las computadoras y dispositivos relacionados. De todos modos, si nos preguntaran una definición más académica, probablemente comenzaríamos a detallar la relación que dichas tecnologías tienen con nuestro trabajo o con nuestro entorno familiar, y no tanto a dar una definición más o menos exacta.

Al hilo de esto, conviene desde el principio indicar cuál es el objetivo fundamental de esta lección. Pretendo transmitir algunas ideas sobre las TIC y más concretamente sobre las Tecnologías de la Información Geométrica. Qué son, qué características tienen, cómo han ido surgiendo, cómo se aplican y como las usamos actualmente.

Comencemos indicando algunos detalles sobre el devenir de los ordenadores.

En [www04] podemos encontrar una apasionante historia del ordenador, con gran cantidad de datos e imágenes, así como detalles de la biografía de grandes científicos que han colaborado en el desarrollo de la Informática. Destaquemos algunos.

El Mecanismo de Antikythera fue encontrado en 1901 por los buzos que exploraban un naufragio cerca de la isla griega de mismo nombre. El mecanismo de Antikythera es la calculadora científica más antigua conocida. Este artilugio con 2.000 años de edad nos ayuda aun más a entender las grandes capacidades de los antiguos griegos.

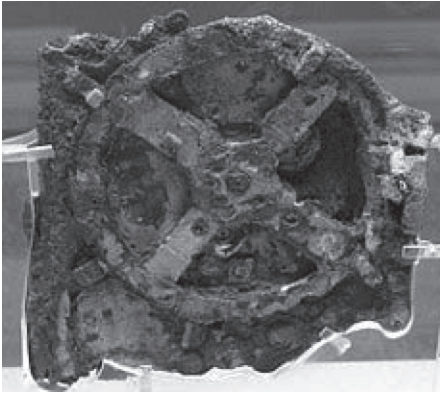


Figura 2. Mecanismo de Antikythera

En el año 1894 Babbage concibió una máquina muy ambiciosa, más tarde llamada máquina analítica. La máquina analítica tiene muchas características esenciales que se encuentran en la computadora digital moderna. Era programable con tarjetas perforadas, una idea tomada del telar de Jacquard utilizado para tejer patrones complejos en el sector textil. Tenía un repertorio interno de cuatro funciones aritméticas, y podía llevar a cabo la multiplicación y la división directa. La estructura lógica de la máquina analítica era esencialmente la misma que la del ordenador de la era electrónica. En este sentido, se puede llamar a Babbage el primer pionero de la Informática.

Los ordenadores digitales hicieron su primera aparición durante los años cuarenta. El Mark I de IBM era un gigantesco aparato electromecánico que pesaba 5 toneladas y ocupaba toda una habitación. Contenía más de 3300 relés - tipo de conmutadores básicos que registraban los estados de “encendido” y “apagado”- y más de 800 kilómetros de cable. Sin embargo, el Mark I solo podía realizar cálculos aritméticos relativamente sencillos, como multiplicar dos cifras de 23 dígitos, una tarea que le llevaba 6 segundos.

Nada más finalizar la Segunda Guerra Mundial, aparecieron los ordenadores con tubos de vacío; éstos sustituían los relés por unos circuitos electrónicos biestables (circuitos flip-flop), encargados de registrar los estados de “encendido” y “apagado”. En 1942, el físico John Mauchly propuso una máquina calculadora totalmente electrónica. El resultado fue el ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer), construido entre 1943 y 1945, la primera computadora electrónica a gran escala para funcionar a una velocidad sin ser frenado por ninguna pieza mecánica. Como los circuitos eran totalmente electrónicos, la rapidez de los cálculos aumentó notablemente (Fig. 3). Con las máquinas construidas durante los primeros años de la década siguiente se podían multiplicar cifras de 10 dígitos en 1/2.000 de segundo. Generalmente se considera que el primer ordenador viable fue la máquina con tubos de vacío. A pesar de su limitada capacidad

de memoria y todavía relativa lentitud en relación a las velocidades de los procesadores actuales, se comercializó para su aplicación con fines científicos e industriales. Esta máquina era la UNIVAC, y representa la primera generación de ordenadores, ya basados en los modelos de

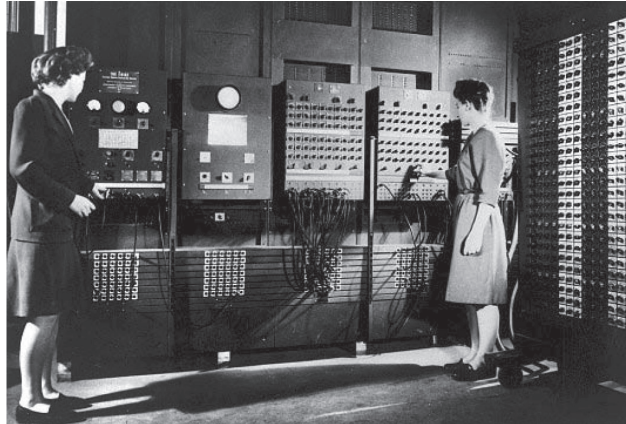


Figura 3. Programando el ENIAC: Frances Bilas (Spence) y Jean Jennings (Bartik)

Von Newman [www05]. Este equipo fue propuesto a la Oficina del Censo así como a grandes empresas. En 1954, General Electric fue el primer usuario de la UNIVAC.

En la segunda generación de computadores, los tubos de vacío fueron reemplazados por transistores, lo que aumentó todavía más la capacidad operativa de los ordenadores y, sobre todo, los hizo mucho más fiables. Al mismo tiempo, su tamaño disminuyó sorprendentemente debido a las pequeñísimas dimensiones de los transistores, que no ocupaban sino 1/200 del espacio de los tubos de vacío; además, solo producían una pequeña fracción del calor de aquellos, de modo que no había inconveniente en que hubiera varios transistores juntos en un espacio muy pequeño. Por otro lado, también se hicieron grandes avances en el campo del software. Esto, unido a las nuevas técnicas, hizo que se incrementara en gran medida el número de usuarios potenciales de los ordenadores.

Posteriormente vendrían los grandes ordenadores de IBM y la introducción del IBM PC en 1981 con una gran campaña de publicidad dirigida al público en general. Sin embargo, el PC IBM tuvo su mayor impacto en el mundo empresarial revolucionando el modelo de trabajar en todo tipo de oficinas.

En Gran Bretaña se construyó el ACE (Automatic Computing Engine). Alan Turing [www04], después de sus triunfos en tiempos de guerra en desciframiento de códigos, decidió unirse al Laboratorio Nacional de Física de Gran Bretaña en 1945 para desarrollar las computadoras electrónicas.

Turing creó siete diseños. El 5º fue construido en 1950 como “piloto ACE” (Automatic Computing Engine), precursor de la ACE.

Lo anterior son las “máquinas” pero, ¿cómo llegar a la información? ¿podemos llegar al conocimiento? ¿cómo obtener y tratar la información geométrica?

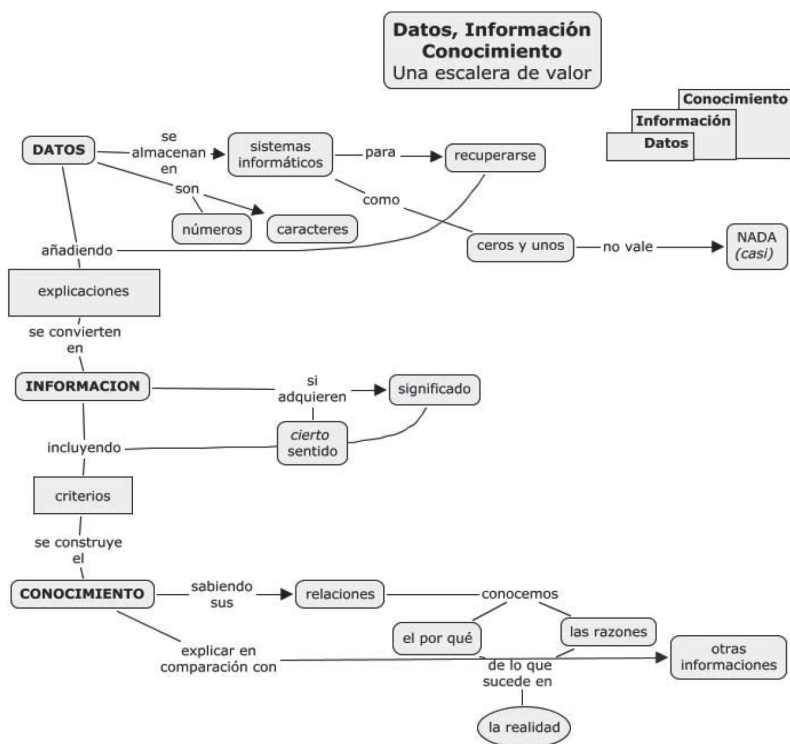


Figura 4. <http://conocity.wordpress.com/conocimiento-disponible/javier-mayor/escalera-de-conocimiento/>

Suele hablarse de la Escalera del Conocimiento (ver fig. 4) como la relación entre datos, información y conocimiento. Un ejemplo sencillo nos permitirá diferenciar estos conceptos. Si enunciamos el término 40 estamos indicando simplemente un número que nos dice muy poco. Esto es un dato. Sin embargo si indicamos 40° C estamos indicando ya una información que corresponde a una temperatura, y si decimos que la próxima semana la temperatura media será en torno a los 35°C estamos aportando un conocimiento obtenido a partir de gran cantidad de información. La

figura 4 muestra esto con más detalle, aunque parece oportuno señalar aquí el comentario de Davenport, Long y Beer [DLB98]:

“A diferencia de los datos, el conocimiento se produce de manera invisible en la mente humana y solo un adecuado clima empresarial puede convencer a la gente para crear, revelar, compartir y utilizar ese conocimiento. A causa del factor humano del conocimiento, es deseable contar con una estructura flexible y que fomente el desarrollo, y son muy importantes las motivaciones para crear, compartir y utilizar los conocimientos. Los datos y la información se transmiten constantemente por medios electrónicos, pero el conocimiento parece viajar más a gusto a través de la red humana”.

¿Se logrará que las computadoras puedan producir ese conocimiento que llamamos humano, ese conocimiento que las asimile a nosotros tal y como dicen los defensores de lo que se denomina “Inteligencia Artificial fuerte”? Son muchos los libros y películas (algunas estrenadas recientemente) que lo sugieren.

Personalmente soy más partidario del punto de vista de Roger Penrose [Pen96], quien indica que ninguna máquina de computación podrá ser inteligente como un ser humano, ya que los sistemas algorítmicos (o sea, los sistemas de instrucciones secuenciadas sobre los cuales están construidas las computadoras) nunca les otorgarán la capacidad de comprender y encontrar verdades que nosotros poseemos.

Del mismo modo, el prof. Martínez Caro nos presenta el siguiente esquema de Inteligencia [Mar12] que no creo posible sea capaz de ser reproducido en una máquina (fig. 5).

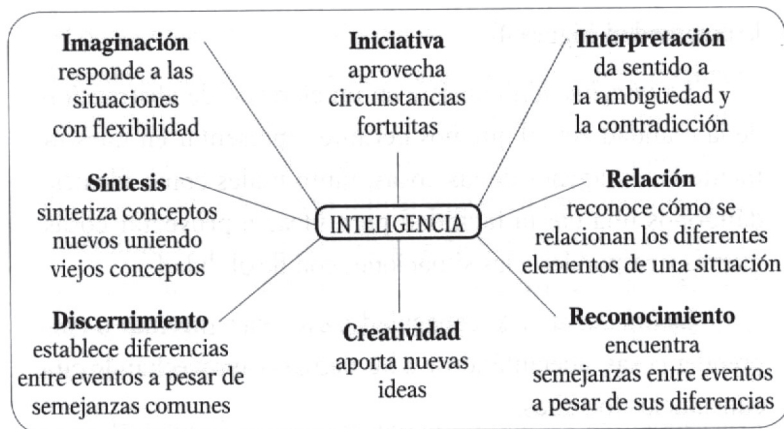


Figura 5. Esquema de Inteligencia

¿Podría una máquina en el futuro plantearse problemas o resolver paradojas? Entre éstas destaca la paradoja de Russell [www06]: Sea C el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Entonces C sería un elemento de C si a la vez C no es elemento de C.

Algo más sencilla de entender, aunque no de resolver, es el problema que le plantean al bueno de Sancho una vez nombrado gobernador de la Isla de Barataria (presentada en el capítulo LI de la segunda parte de El Quijote):

—Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (y esté vuestra merced atento, porque el caso es de importancia y algo dificultoso). Digo, pues, que sobre este río estaba un puente, y al cabo della, una horca y una como casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma: “Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello horcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna”. Sabida esta ley y la rigurosa condición della, pasaban muchos, y luego en lo que juraban se echaba de ver que decían verdad, y los jueces lo[s] dejaban pasar libremente. Sucedió, pues, que, tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: “Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre”. Pídesse a vuestra merced, señor gobernador, qué harán los jueces del tal hombre; que aun hasta agora están dudosos y suspensos. Y, habiendo tenido noticia del agudo y elevado entendimiento de vuestra merced, me enviaron a mí a que suplicase a vuestra merced de su parte diese su parecer en tan intrincado y dudoso caso”.

¿Cómo lo resolvería una máquina? Puede ser un buen momento de releer El Quijote y ver cómo Sancho Panza lo resuelve.

Volvamos, en el siguiente apartado, a nuestro tema principal.

2. TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN GEOMÉTRICA

Para acercarnos al concepto que titula esta lección vamos en primer lugar a acudir a las fuentes más básicas. Así, en el Diccionario de la Lengua Española (DRAE) [www07] se indica que Tecnología es el “Conjunto de teorías y de técnicas que permiten el aprovechamiento práctico del conocimiento científico”. De modo similar, en la Enciclopedia Británica [www08] se indica “*Technology: the application of scientific knowledge to the practical aims of human life or, as it is sometimes phrased, to the change and manipulation of the human environment*”. En ambos casos cabe resaltar que la tecnología se refiere siempre al uso práctico del conocimiento científico o teórico. Y en [RA+90] aparecen las siguientes definiciones básicas “Información: Comunicación o adquisición de conocimientos que permiten ampliar o precisar los que se poseen sobre una materia determinada” y “Geometría: Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio.”

Lo anterior nos permite ya entrever el posible contenido de las siguientes páginas. Pretendemos describir algunas teorías y técnicas que nos permitan gestionar y automatizar la información que tenemos de los elementos del plano y del espacio, de modo que aumentemos nuestro conocimiento de ellos, y que a partir de dicho conocimiento consigamos aplicaciones prácticas que mejoren nuestra vida diaria.

Podríamos habernos centrado en Internet (necesitaríamos no sólo una lección sino un curso completo) o en temas de seguridad computacional o en realidad aumentada o en desarrollos para móviles o en la muy famosa y actual “nube” o en muchos otros temas posible. Pero he considerado más oportuno, como he indicado al principio, un tema cercano a la docencia y a la investigación en el que llevo trabajando 20 años.

¿Y por qué hacer una distinción especial y centrarnos en TIG? Como ya hemos indicado la geometría nos va a permitir estudiar las figuras en el plano y en el espacio; ellas nos rodean y nos acompañan en muchas circunstancias de nuestra vida.

Todos reconocemos que la Informática Gráfica ha aportado grandes avances en los últimos años, y en todos ellos ha habido una gran mejora en las tecnologías que manejan la información geométrica subyacente. Tanto en lo relacionado con los videojuegos y efectos especiales en cine, en el cine de animación y cine en 3D como en el de las aplicaciones en campos como

la Medicina, la Ingeniería Industrial o Civil, el Patrimonio Cultural, es evidente el desarrollo de dichas tecnologías, y seguro que seguirán avanzando.

De modo similar, la Geometría es la base de todo el conocimiento geográfico que está permitiendo mediante las técnicas geomáticas grandes desarrollos en el tratamiento de dicha información, como por ejemplo los asistentes a la conducción mediante el diseño de rutas adecuadas o las aplicaciones para recorridos virtuales, como Google Earth, que destaca entre las más populares aunque no entre las más potentes.

2.1 Modelización

Al objeto de poder aportar información, presentar o estudiar cualquier tipo de realidad física, lo primero es obtener una representación lo más adecuada posible de esa realidad, y que dicha representación sea susceptible de ser utilizada usando un ordenador. Ya que es imposible realizar una copia idéntica de un elemento, es necesario que la representación realizada mantenga un equilibrio adecuado entre realismo y posibilidad de uso.

Las representaciones permiten compartir información, así como transmitir e intercambiar conocimiento entre diversas personas. Sin esa posibilidad, cada persona sólo accedería a lo que sus sentidos le transmiten de la realidad circundante. La figura 6 nos detalla el proceso de modelización y su uso.



Figura 6. Modelización

Actualmente se puede afirmar que las representaciones más buscadas y usadas son las representaciones digitales, es decir, aquellas que se definen, desarrollan y gestionan mediante ordenadores o dispositivos similares. Esas

representaciones digitales son la base de las TIC. Son muchas las ventajas de las representaciones digitales: su gestión es independiente del significado; son fáciles de copiar, transmitir, guardar, etc.; igualmente son fáciles de transformar, procesar y analizar. Este tipo de representación usa solo dígitos binarios (0 y 1) para representar información y es la base de casi toda la comunicación humana moderna. Lo que siempre es imprescindible y nunca podemos perder de vista es que un modelo digital solo aproxima la realidad que representa. Por tanto debemos conocer el nivel de esta aproximación y si es posible medirla de algún modo. Son bien conocidos formatos como el MP3, formato digital para representar música, el JPG para la representación de imágenes ó el XML para la representación de información mediante texto plano.

En la representación mediante un modelo es imprescindible distinguir el modelo propiamente dicho y los atributos que le acompañan. Estos son el conjunto de propiedades que queremos expresar en nuestro modelo o representación.

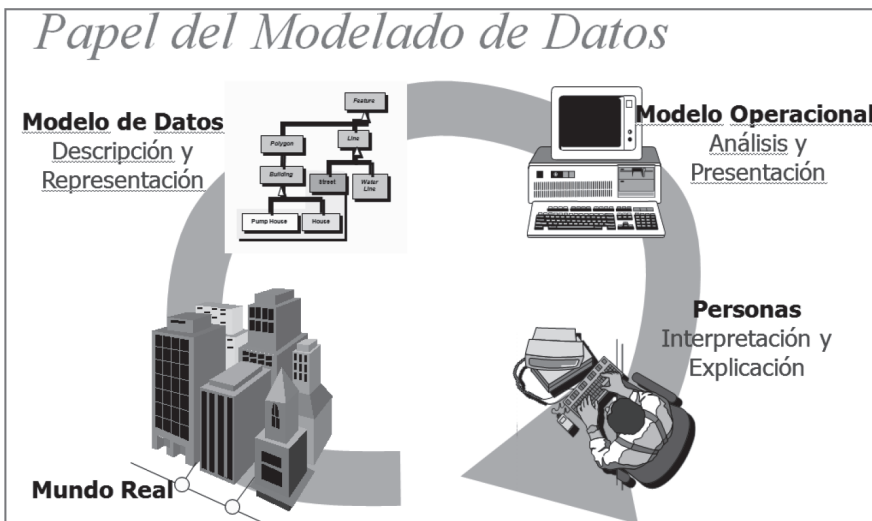


Figura 7. Modelización (John Wiley & Sons, Ltd, 2005)

Como ya hemos indicado el objetivo de un modelo es representar la realidad lo más adecuadamente posible (ver fig. 7). Para ello, y teniendo en cuenta que el objetivo es poder usar ese modelo para simulaciones o trabajos sobre lo representado, es necesario conocer cómo se comporta dicho modelo. Ello implica la necesidad de usar modelos formales, es decir,

modelos basados en teorías matemáticas y físicas, que puedan dar el soporte adecuado a todo tipo de estudio. A la vez estos modelos formales o matemáticos deben ser convertidos en modelos computacionales susceptibles de ser usados en los ordenadores.

Estos procesos implican siempre procesos de abstracción y por tanto de pérdida de información; a veces es posible que se obtengan modelos que en la realidad no pueden existir. Es bien conocido el triángulo de Penrose o el cubo imposible (fig. 8).

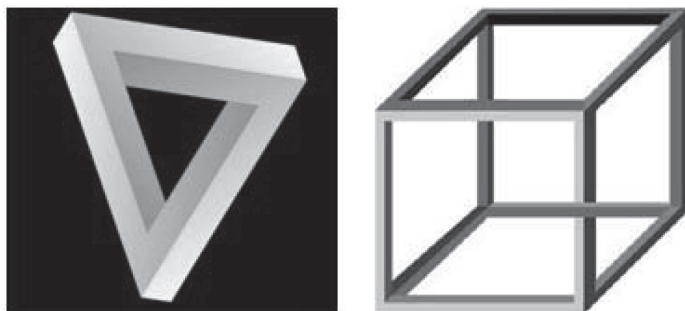


Figura 8. Figuras imposibles

Otros ejemplos interesantes se pueden encontrar en los modelos de Escher [www09].

Los ejemplos anteriores son evidentes, ya que disponemos de imágenes que los representan, y esto nos permite comprobar visualmente que son modelos que no se corresponden con entidades reales. Modelar la información geométrica relativa al mundo que nos rodea es un proceso complejo y siempre implica trabajos especiales. Podemos afirmar que la información geométrica es *especial*, como se comprueba en algunas de sus características: es multidimensional, muy voluminosa, requiere de métodos de análisis especiales, requiere integración de datos, la actualización de datos es cara y requiere mucho tiempo. Por otro lado, en muchas aplicaciones de las TIG se requiere una recuperación rápida de datos, se trabaja a diferentes escalas, se trabaja con diferentes modos de representación. Así mismo, la información geométrica que obtenemos a partir de los datos debe tener unas características adecuadas, entre las que destacan (ver [GoS11]): exacta (precisa y libre de errores), completa (contener todos los hechos relevantes), económica (obtenida al menor coste posible), fiable (que garantice la calidad de los datos y de las fuentes utilizadas), relevante (útil para la toma de decisiones),

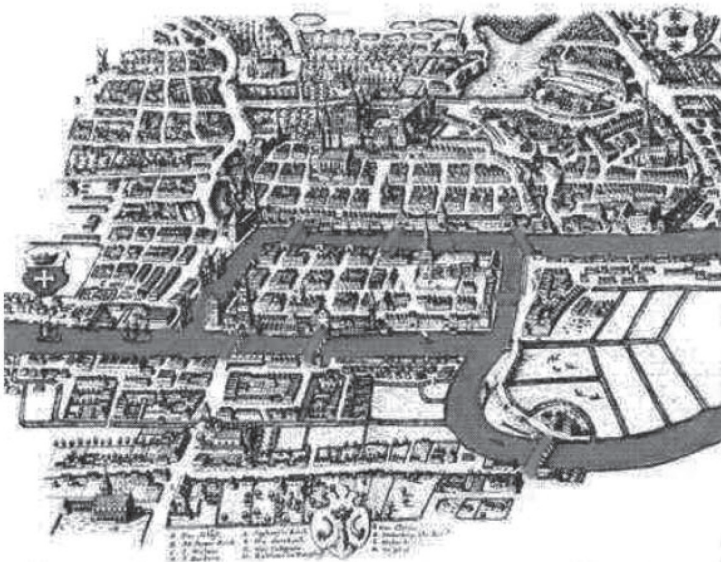
minuciosa (con el detalle adecuado la función a la que se la destina), oportuna (dirigida a la persona adecuada y entregada en el momento adecuado) y verificable (susceptible de ser contrastada y comprobada).

Veamos a continuación un ejemplo concreto de modelización.

Todos hemos oído frases (con una entonación peculiar) del tipo “a quinientos metros gire a la derecha”, “continúe por calle Castellana durante 2 kilómetros”, “en la rotonda salga por la tercera salida hacia calle Alcalá”.

Los denominados navegadores, y actualmente la mayoría de los teléfonos, tienen la capacidad de dirigirnos hacia un punto de destino. Pero ¿qué contiene ese teléfono para que sea capaz de ayudarnos? Tiene un modelo del territorio que contiene la información necesaria para poder diseñar una ruta e ir aportándonos información cuando surgen varias posibilidades. El modelo se basa en la Teoría de Grafos y consta únicamente de puntos y de segmentos (que a su vez están también definidos por puntos). Junto a esta información geométrica existe otro tipo de información denominada topológica que aporta las posibles relaciones de conectividad entre dichos elementos. Dicha Teoría surgió a raíz de una cuestión puramente lúdica.

A view of Königsberg as it was in Euler's day



A view of Königsberg showing the seven bridges over the River Pregel

Figura 9. Mapa de Königsberg en tiempos de Euler [www10]

El problema de los Puentes de Königsberg (fig. 9) consiste en determinar si los siete puentes de esta ciudad sobre el río Preget pueden ser cruzados en un único recorrido sin pasar dos veces por el mismo sitio y de modo que el recorrido finalice en el mismo punto que comenzó. Euler lo resolvió en 1736, demostrando que no existía un camino que cumpliera los requisitos. Fue el comienzo de la teoría de grafos. Actualmente son muchísimas las aplicaciones de la teoría de grafos en prácticamente todos los campos del saber.

Y remarcar lo anterior es importante: “Por todo esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos, Leibniz, Gauss, Einstein, hayan sido aficionados y agudos observadores de los juegos, participando activamente en ellos... El siglo XIX fue el siglo de oro del desarrollo de la geometría. El mismo sentido geométrico que estimuló los desarrollos espectaculares del siglo XIX sigue vivo también hoy en campos tales como la teoría de grafos, teoría de cuerpos convexos, geometría combinatoria, algunos capítulos de la teoría de optimización, de la topología. Como rasgos comunes a todos estos desarrollos se pueden señalar: una fuerte relación con la intuición espacial, una cierta componentes lúdica y, tal vez, un rechazo tácito de desarrollos analíticos excesivos” [Guz2006].

Una vez disponemos del modelo matemático formal necesitamos obtener el modelo computacional y los algoritmos necesarios para poder desarrollar el software que nos facilita lo que hemos propuesto. En el ejemplo indicado, dos son los algoritmos a aplicar para el cálculo de rutas: el de Dijkstra [www11], que calcula el camino mínimo entre un punto y todos los demás, y el de Floyd-Warshall [www11], que calcula la mínima distancia entre todos los puntos y que resulta mejor que aplicar el algoritmo anterior a todos los puntos.

Al objeto de que el usuario que está usando un navegador tenga una visión mejor de la zona, se visualizan también imágenes pero que no incluyen ningún tipo de información geométrica: son solamente matrices de valores en la que cada uno de estos se correspondiente con un color y que en conjunto forman un mapa.

2.2. Geometría

La Informática es ingeniería pero a la vez tiene una gran componente científica. Es clara su gran relación con las Matemáticas; el campo que nos ocupa evidentemente está más relacionado con la Geometría.

No tenemos tiempo ni espacio para describir el contenido del interesantísimo libro del gran Matemático Sir Thomas Heath “A History of Greek Mathematics”. Solo detallar que ya los griegos hablaban de cuatro partes del conocimiento, el denominado *quadrivium* Pitagórico: geometría, aritmética, astronomía y música [Hea81].

Muchos escritores griegos señalaban a Egipto como cuna de la geometría, entendida ésta como medida. Especialmente interesante es el papiro de Rhind [www12] en el que ya se habla de triángulos, rectángulos, trapecios y círculos, entre otras muchas cosas interesantes.

Luego Thales, Amerisrus, Pitágoras, Anaxágoras, Hipócrates, Teodoro de Cyrene, Exodus, Theaetetus y llegamos al gran Euclides, cuya geometría perdura hasta 1835, en que Lobachesky inicia la publicación de sus trabajos sobre nuevas geometrías (geometrías no-euclídeas) [Al+79].

Berlinski [Ber13] denomina a Euclides “El rey del espacio Infinito” y evidentemente es una de las figuras más relevantes de la Historia, no sólo en el campo de la Geometría, sino también de las Ciencias, de las Ingenierías y de las Artes.

Euclides parte de definiciones y nociones comunes para llegar a demostrar un conjunto de teoremas. Sus famosos Elementos constan de un total de 23 definiciones, 5 nociones comunes (“creencias que todos los hombres deben admitir”) y 5 axiomas. A partir de ahí obtiene el conjunto de sus proposiciones que se incluyen en los libros del I al XIII [www13]. Por ejemplo su primera definición (“Un punto es lo que no tiene partes”), o una de sus nociones comunes (“El todo es mayor que la parte”), indican cómo desea construir un edificio con sólidos cimientos, y así lo hace. Pensar en la forma de las cosas, en su posición, pensar en el espacio y lograr formalizarlo es posible gracias a la obra de Euclides.

Pero Euclides aportó algo más (y por eso sugiero que se lean sus libros) tal como nos lo mostró en su día Abraham Lincoln. Hay un pasaje notable en la vida de este presidente americano que vale la pena repetir aquí. Lo que sigue es un resumen personal de una cita del reverendo JP Gulliver, entonces pastor de la Iglesia Congregacional en Norwich, Connecticut. Es parte de una conversación que tuvo lugar poco después del discurso en el Cooper Institute en 1860, y fue impreso en *The Independent* (01-IX-1864). “¡Oh, sí! ‘He leído la ley, tal y como me pregunta; me convertí en secretario de un abogado en Springfield, y copié documentos tediosos, y aprendí lo que pude

de la ley en los intervalos de otro trabajo. Pero su pregunta me recuerda un poco la educación que tuve, y me veo obligado a hablar con honestidad. En el curso de mi lectura de la ley constantemente me encontré con la palabra demostrar. Pensé, al principio, que yo entendía su significado, pero pronto se convirtió en la certeza de que no lo hacía. Me dije a mí mismo: ¿Qué más hago cuando demuestro que cuando razono o pruebo? ¿Cómo la demostración difiere de cualquier otra prueba? Consulté el diccionario Webster. Hablaban de ‘prueba segura’, ‘prueba más allá de toda posibilidad de duda’. Pensé muchas cosas que habían sido probadas más allá de toda posibilidad de duda, sin recurrir a ningún proceso extraordinario de razonamiento. Consulté todos los diccionarios y libros de referencia que pude encontrar, pero sin mejores resultados. Era como intentar definir el término azul a un ciego. Al final me dije: Lincoln nunca serás abogado si no entiendes bien el significado de demostrar. Deje mi posición en Springfield, regresé a casa de mi padre y permanecí allí hasta que podía tener presente todas y cada una de las proposiciones de los seis libros de Euclides”[www14].

Considero que la búsqueda de la verdad, y lo anterior es un ejemplo de ello, es labor de toda persona y muy especialmente de todo profesor universitario. Afirmo con rotundidad que la verdad sí existe, y que merece la pena gastar la vida en su búsqueda¹ y vivir por y para ella. ¿Y cómo es esa búsqueda?.

Cuenta Berlinski [Ber00] un cuento (“The Dream Merchant”), relativo a la búsqueda de la verdad, que me parece oportuno resumir aquí:

“En algún lugar de Roma un judío tenía una tienda de sueños, y allí acudían personas de todo tipo y condición a comprar sus sueños, incluso a altas horas de la noche, cuando no podían conciliar el sueño. Un día de invierno llamó a la puerta del comercio un pequeño hombre vestido a la usanza griega. Venía en nombre de su amo, un hombre muy rico, en busca de un sueño. Por 100 denarios el comerciante le vendió el sueño de la Belleza. El señor se sintió muy satisfecho con la compra y envió de nuevo a su sirviente; el comerciante le ofreció por 200 denarios el sueño del Amor. Satisfecho con este segundo sueño volvió a enviar a su sirviente y le pidió que comprase el sueño de la Verdad. Como si estuviese calculando el precio, el comerciante se quedó pensativo, y después de un rato de silencio le dijo al siervo: ‘En este caso tu amo debe venir él mismo y yo se lo daré’. Al poco tiempo llegó el rico amo: ‘Soy Aristarco y deseo el sueño de la

¹ ..et cognoscetis veritatem et veritas liberabit vos [Evangolio de San Juan. 8,32]

verdad'. 'Le costará 1000 denarios'. Dudó y dijo: 'Verá, no es el dinero sino que ¿veré la Verdad si sueño este Sueño?' le dijo al comerciante. 'Incluso en los sueños, ningún hombre verá toda la Verdad', contesto éste.' '¿Y qué parte verá?': 'La parte que pueda ver'. A la semana de haberse cerrado el trato volvió Aristarco a la tienda. 'He soñado durante siete noches con la Verdad. La primera noche soñé que subía saltando por grandes escalones blancos. A cada paso veía que estaba más cerca de la Verdad. Anhelaba llegar al sol. Saltaba y saltaba hasta que las piernas comenzaron a dolerme. Podía sentir el calor del sol y el brillo cayendo del aire. Los mismos pasos brillaban bajo mis pies. Una gran sensación de felicidad se extendió a través de mi cuerpo. Y entonces desperté. El día era gris. Me sentí como en un baño de agua fría. Las siguientes noches fueron igual. Incluso subía más alto, pero al despertar el día era gris. No estaba más cerca de la Verdad de lo que estaba el primer día. Siento su resplandor, pero no puedo alcanzarla'. 'Puede soñar otra vez', le dijo el comerciante. 'Pero si sueño y sueño otra vez, cuándo alcanzaré la Verdad'. 'Cuando suba todos los escalones'. '¿Y cuándo los subiré?', '¿Cuándo haya alcanzado la Verdad'. 'No es una respuesta muy satisfactoria'. 'Es que la suya no es una pregunta muy satisfactoria'. 'No es el sueño que pensé soñar', 'sin embargo era el sueño que usted soñó'. Aristarco dijo finalmente 'le devuelvo su sueño, es un sueño que ya no quiero'. El comerciante asintió con la cabeza como diciendo entendía que Aristarco pensaba tener su dinero de vuelta, pero que era demasiado orgulloso para pedirlo. Dijo a Aristarco 'Es caro el sueño de la Verdad. En comparación, la Belleza y el Amor son más baratos'. Sonriendo le constó Aristarco, 'pero después de todo, el dinero es sólo dinero', 'Si, y la Verdad es sólo Verdad', contesto el comerciante viendo como Aristarco se dirigía a su carruaje.

Al poco rato entró en la tienda un joven, vistiendo una inmaculada túnica, el poeta Catullus, bien conocido por el comerciante. 'Por favor, deseo soñar otra vez con mi amada Lesbia'.

'Los jóvenes siempre desean soñar con lo que han perdido', '¿y los viejos?', preguntó Catullus, 'Con lo que no han encontrado', contesto el comerciante, dirigiéndose a buscar el sueño del joven poeta".

Hemos indicado anteriormente que buscamos herramientas para el tratamiento adecuado de la información geométrica. Estas herramientas pueden ser de dos tipos: hardware y software.

¿Cuáles son los dispositivos orientados a la información geométrica? Algunos que podemos citar son:

-El conjunto de aparatos usados en Topografía, que proporcionan ángulos y distancias geométricas [Cru2014].

-GPS (Global Positioning System): propiamente el término GPS se refiere a una red de satélites, desarrollada por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos. Por extensión, se denominan así a los dispositivos que nos proporcionan las coordenadas del sitio en el que se encuentran mediante la lectura y tratamiento de la señal que reciben de dicha red de satélites. La lectura que nos dan son las coordenadas X, Y y Z (o bien longitud, latitud y altura). Es importante recalcar que los dispositivos que usamos habitualmente tiene una precisión en torno a 5 metros en X e Y, y a unos 10 metros en Z. Por supuesto que existen dispositivos con mucha mayor precisión. Similar a la red GPS son las redes Glonass (gestionado por la Federación Rusa), Beidou (proyecto chino) y Galileo (proyecto europeo), estas dos últimas aún no totalmente operativas.

-Satélites y aviones: Los satélites también nos proporcionan información muy valiosa a partir de los sensores que llevan incorporados. De modo similar se pueden incorporar determinados sensores a los aviones. Entre esta información destacan los modelos digitales obtenidos mediante sensores láser.

-Escáneres 3D: son dispositivos que mediante la medición de pulsos láser y de ángulos, tanto horizontales como verticales, nos proporcionan el modelo digital del objeto sobre los que se aplican. Dependiendo de la precisión y rapidez de medida tienen gran cantidad de usos en la industria, arqueología, arquitectura, patrimonio, etc.

-Impresoras 3D: en este caso se trata de dispositivos de carácter inverso a los anteriores: a partir de información geométrica concreta de un modelo nos proporcionan una copia física de dicho modelo.

-Sensores como Windows Kinect, Asus Xtion Pro Live o Leap Motion, ya incluido en algunos portátiles de HP, que permiten reconocer gestos.

2.3 Algoritmos Geométricos

Los elementos anteriores son importantes pero todos ellos requieren de un software adecuado que permita el tratamiento de los datos que proporcionan, necesitamos algoritmos.

Podemos decir coloquialmente que un algoritmo es el programa más sencillo: son los bloques básicos con los que se construyen los programas informáticos.

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi [www05], nacido en Persia alrededor del 780, fue matemático, astrólogo, geógrafo, fue un gran erudito en la Casa de la Sabiduría, en Bagdad. Su trabajo más reconocido, y que se llama así después de él, es el concepto matemático de algoritmo. Ya usaba procesos para hacer grandes sumas y divisiones muy largas, principios que se encuentran en textos de Al-Khwarizmi escritos hace más de 1.200 años. Fue también responsable de la introducción de los números árabes de Occidente así como del símbolo cero.

El Álgebra de al-Khwarizmi es considerada como fundamento y la piedra angular de las ciencias. Se contenía en su obra más grande, “Hisab al-Jabr wa-al-Muqabala”. El libro, que fue traducido al latín en dos ocasiones, por Gerardo de Cremona y por Roberto de Chester en el siglo XII; contiene la resolución de varios cientos de ecuaciones cuadráticas simples de análisis, así como ejemplos geométricos. También tiene secciones sustanciales sobre los métodos de división de herencias y de estudio de parcelaciones de tierras. Tiene que ver en gran medida con los métodos para resolver problemas computacionales prácticos en lugar de lo que actualmente se entiende por álgebra como el término se entiende ahora.

Godel, Church, Post, Cohen, Turing, son figuras a estudiar; de modos diversos han sido los precursores más cercanos que han aportado grandes avances en la algorítmica. La reciente celebración del Año Turing, con motivo del centenario de su nacimiento, es un motivo perfecto para leer las grandes aportaciones que Alan Turing hizo a la Informática [www15].

Para que un algoritmo se pueda ejecutar es necesario implementarlo. Lo fundamental de un algoritmo es que sea demostrable y sea eficaz. Recuerdo en mis primeros tribunales de proyectos fin de carrera de Topografía e Ingeniería tenía que evaluar diversos programas que habían realizado los estudiantes. Siempre preguntaba lo mismo. ¿Funciona tu programa? ¿Por qué?. El estudiante me miraba con cara de extrañeza dando a entender lo absurdo de mi pregunta y solían responder: “Claro que funciona. Lo he hecho yo”.

Demostrar que un algoritmo funciona en todos los casos es uno de los aspectos más complejos de la Informática (y aun mucho más en programas complejos). Así mismo, debe ser eficaz en el sentido de que sea lo más rápido posible (hay algoritmos que se deben ejecutar millones de veces) e intentar que los datos a manejar ocupen lo mínimo posible. Mejor si es logarítmico que lineal y esto mejor que cuadrático o cúbico y por supuesto mejor que exponencial. ¿Qué significa esto?

Uno de los algoritmos imprescindibles a la hora de gestionar datos es el de ordenación. Los programas informáticos gestionan millones de datos y muy frecuentemente es necesario buscar uno de ellos. ¿Cómo lo haríamos nosotros? Primero los ordenaríamos y después haríamos la búsqueda. Ya que no podemos estar constantemente reordenando los datos en función del tipo de dato o campo que queramos buscar, lo que se hace es construir unos conjuntos auxiliares, denominados conjuntos índices. Por cada campo que queramos ordenar se crea un conjunto índice, que es el que usaremos para las búsquedas relacionadas por ese campo. Pongamos un ejemplo: supongamos que tenemos los datos de los estudiantes de la Universidad. A cada estudiante podemos asignarle un número de expediente. Habitualmente este número será el que corresponde al dar de alta a los estudiantes por lo que el fichero global está ordenado por este número de expediente.

Ahora nos dan unas fichas en las que aparece el número de expediente de cada estudiante y su DNI y nos piden que ordenemos esas fichas por el DNI. Cada DNI es un número de 8 cifras (del 1 al 99.999.999; la letra se le asigna automáticamente mediante una fórmula concreta, por lo que podemos prescindir de ella); una de las formas de hacerlo sería la siguiente:

En un montón ponemos los DNI menores de 50.000.000 y en el otro los mayores de 50.000.000. El primer montón lo volvemos a dividir en dos: números del 1 al 25.000.000 y del 25.000.001 al 50.000.000, y de modo similar con el otro montón. Tenemos ahora cuatro montones. Si repetimos el proceso de nuevo aparecerán 8 montones (si al dividir los números frontera sale un decimal decidimos escoger el entero más próximo). Si al constituir un montón éste está vacío o con un solo estudiante, no es necesario volver a dividirlo. Si repetimos el proceso, llegará un momento en que en cada montón habrá un solo estudiante o estará vacío (lo que hemos construido se denomina árbol binario). Si ahora vamos uniendo los montones que proceden de una misma división, desde abajo hacia arriba al final tendremos un único montón ordenado. Esto es lo que se denomina conjunto índice de estudiantes ordenado por DNI. Si ahora en el conjunto original de estudiantes nos piden que busquemos su ficha completa sabiendo el DNI, usaremos este conjunto auxiliar. Al estar ordenado será muy fácil buscar.

Vamos al conjunto auxiliar y lo dividimos por la mitad; ¿el DNI que buscamos está por encima o por debajo de este número? Supongamos por debajo. Podemos olvidarnos de la mitad superior. Con la mitad inferior volvemos a partir por la mitad y vemos si el que buscamos está por encima

o por debajo. En unos pocos pasos encontramos el DNI buscado con su correspondiente número de expediente. Con este número de expediente vamos al conjunto global y buscamos la ficha completa. La ordenación tarda un tiempo lineal pero el tiempo de la búsqueda es logarítmica. ¿Qué quiere decir esto? Pues que si el fichero consta de las fichas de 100.000 estudiantes el tiempo de ordenación es proporcional a ese número, pero el de búsqueda es proporcional a 5 (el logaritmo de 100.000). Si fuese cuadrático el tiempo sería proporcional a 10.000.000.000.

Pero ¿qué pasa con los elementos geométricos? (puntos, líneas y polilíneas, polígonos, paralelepípedos). ¿Cómo ordenar estos elementos? Veamos un ejemplo. Sabemos que existe actualmente una cartografía de todas las parcelas de olivar. Muchas veces queremos seleccionar en el mapa una parcela concreta, y deseamos toda la información disponible sobre ella. Para ello tendremos que tener las parcelas (polígonos) ordenadas para que la búsqueda sea más rápida y eficiente. ¿Cómo se realiza? Veamos algunos detalles sin profundizar en excesivos detalles técnicos.

Para cada parcela se define el rectángulo que la envuelve y van a ser estos rectángulos los que se ordenen (ver fig.10).

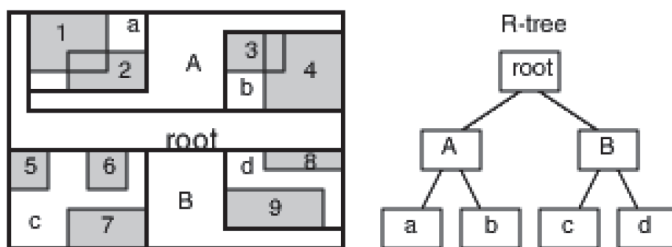


Figura 10. Árbol R para organización de rectángulos [www12]

Ya que estos rectángulos se intersecan entre sí no es posible construir una árbol que discrimine los rectángulos entre sí de modo que no es posible conseguir búsquedas logarítmicas. Por eso se acude a técnicas más complejas que aceleren las búsquedas. Lo que sí queda claro es que una vez elegido el rectángulo, hay que saber qué parcela es, es decir debemos saber si un punto está o no dentro de un polígono concreto. Este problema, denominado “punto en polígono”, es clásico entre los algoritmos geométricos. Vamos a presentar una solución sencilla y elegante que a su vez permite resolver otros algoritmos más complejos, y sobre los que nuestro grupo

ha realizado bastantes publicaciones de prestigio (ver [FTU95], [Se+05], [RuF99], [RuF11], [OrF95], [JFS09], [Og+07], [GRF11]).

Supongamos que P es un polígono con vértices ordenados en sentido antihorario y $f(Q)$ es la función que asigna la suma de los valores ± 1 ó 0 según que Q esté o no en cada uno de los triángulos formados por el origen O y cada una de las aristas ($+1$ si los vértices del triángulo están orientados en sentido antihorario y -1 en caso contrario). Entonces: **El punto Q está en P si y solo si $f(Q)=1$** (fig. 11).

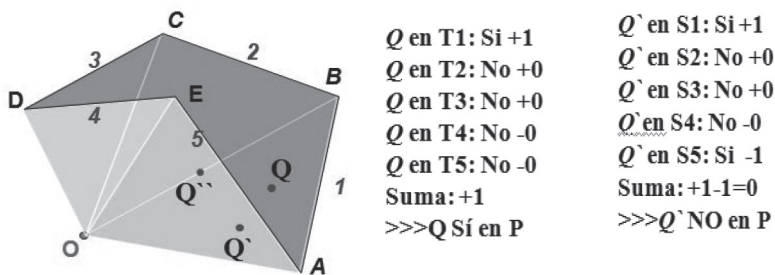


Figura 11. Ejemplos del algoritmo de inclusión

Como suele ocurrir siempre hay casos especiales que requieren un tratamiento adecuado. Una parte muy importante de la demostración de un algoritmo se dedica a detectar y resolver estos casos especiales. ¿Qué debe hacer el algoritmo en el caso del punto Q ? ¿Y si Q coincide con O ?

Lo que hemos hecho es reducir la inclusión en polígonos a inclusión en triángulos. Un punto está en el interior de un triángulo (con los vertices ordenados en sentido antihorario) si ese punto ve a cada par de vértices también en sentido antihorario y esto puede ser resuelto mediante sumas, restas y multiplicaciones (mediante el signo de un determinante, dicho en términos más técnicos).

Conviene insistir en que estos algoritmos han sido demostrados y que son muy fáciles de implementar. Como hemos dicho, sólo usan operaciones sencillas como comparaciones, sumas, restas y multiplicaciones: lo que mejor “se le da al ordenador”.

La figura 12 muestra un polígono más complejo, con agujeros. Pueden probar con los puntos que diseñen. El algoritmo funciona.

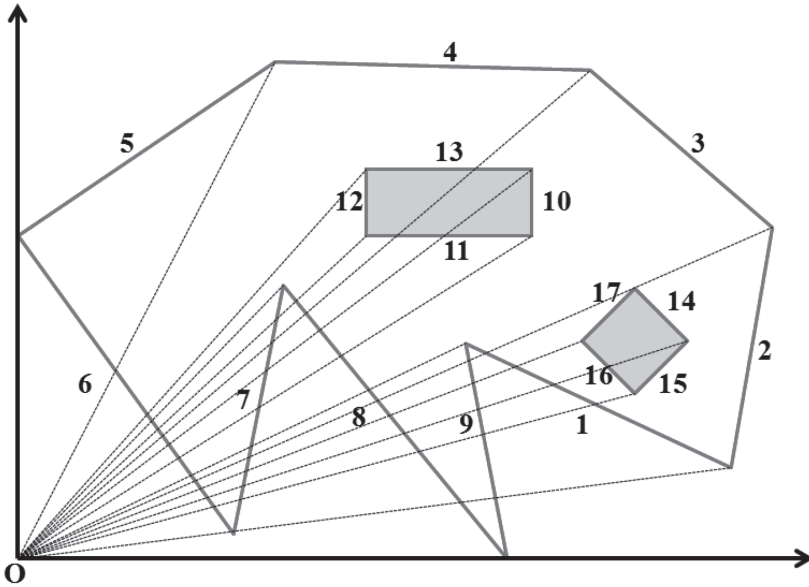


Figura 12. Pruebe con los puntos que desee

En las siguientes figuras se muestra otros algoritmos muy útiles y que se deben realizar millones de veces en muchas aplicaciones. Permiten calcular la unión, intersección o diferencia entre cualquier par de polígonos, sean de la forma que sean e incluso si tienen agujeros (estos etiquetan sus aristas en sentido horario). Si lo desean, los pueden estudiar detalladamente a partir de las figuras.

Se calculan las intersecciones entre P1 y P2 y se calculan los puntos medios de todas las aristas (si una aristas se ha cortado se calcula el punto medio de cada parte). Luego se estudia la inclusión de estos puntos en polígono: puntos de P1 que estén dentro de P2 y de P2 que estén dentro de P1.

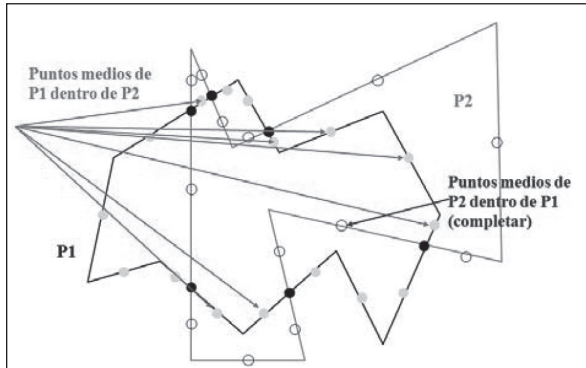


Figura 13. Cálculo de intersecciones y puntos medios

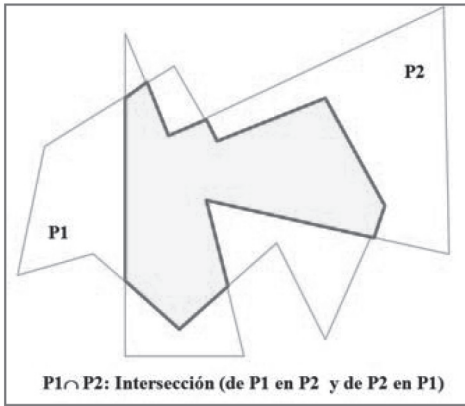


Figura 14. Intersección de dos polígonos

En función de la operación que se desee realizar, se eligen unos u otros. Por ejemplo: si se deseara hallar el espacio común entre las zonas de influencia de dos antenas de telefonía se debería calcular la intersección entre polígonos (o la unión si se desea calcular la zona cubierta por ambas). Como suele ocurrir hay casos especiales pero que se detectan y resuelven fácilmente.

Hemos presentado algunos aspectos básicos de la información geométrica asociada a elementos simples. Pero es posible también encontrar elementos geométricos que nos permiten modelar aspectos más complejos de nuestro mundo real.

Recordemos la última vez que hemos contemplado una línea de costa, muy probablemente en este verano que acaba. Forman curvas que se pueden hacer corresponder con los fractales. Benoit Mandelbrot señala: “creo que muchas formas de la naturaleza son tan irregulares y fragmentadas que la naturaleza no sólo presenta un grado superior de complejidad, sino que esta se nos revela completamente diferente. (...) La existencia de estas formas representa un desafío: (...) la investigación de la morfología de lo “amorfo”. (...) En respuesta a este desafío, concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza y empecé a aplicarla a una serie de campos. Permite describir muchas de las formas irregulares y fragmentadas que nos rodean, dando lugar a teorías coherentes, identificando una serie de formas que llamo fractales”. Él mismo nos plantea la siguiente cuestión:

“¿Cuánto mide la costa de Bretaña?: Para empezar con un primer tipo de fractales, a saber, las curvas de dimensión fractal mayor que 1, considérese un tramo de costa. Es evidente que, por lo menos, mide tanto como la distancia en línea recta entre sus extremos. Ahora bien, una costa típica es irregular y sinuosa, y sin duda es mucho más larga que dicha recta. Hay varias maneras de evaluar su longitud con mayor precisión, y en este capítulo se analizan algunas de ellas. El resultado es de lo más curioso: la longitud de una costa es un concepto esquivo, que se nos escapa entre los dedos cuando pretendemos asirlo. Todos los métodos de medida llevan a la conclusión de

que la longitud de una costa típica es muy grande, tan indeterminada que es mejor considerarla infinita. En consecuencia si se quiere comparar la «extensión» de distintas costas, la longitud es un concepto inadecuado. En este capítulo se busca una alternativa mejor (...). Contra lo que hubiera podido parecer en un principio, las mayoría de mis trabajos han resultado ser los dolores de parto de una nueva disciplina científica, la geometría fractal de la naturaleza” [Man97].

Lo anterior nos indica que la introducción hecha hasta ahora no es más que eso: una breve introducción para que todos aquellos que lo deseen se impliquen, también con su intuición e imaginación, en modelos y algoritmos más complejos. ¿Y cómo avanzar?

Considero oportuno señalar, para finalizar este capítulo, un consejo de Leslie Lam, último Premio Turing e investigador de Microsoft Research [Sav14] (y desarrollador, entre otras muchas cosas, de LaTeX). Indica a todos aquellos que quieran ser diseñadores de sistemas que aprendan a pensar mejor, y para ello deben pensar matemáticamente, deben conseguir una buena educación matemática.

3. APLICACIONES

En el apartado anterior hemos descrito (e indicado que están demostrados) algunos algoritmos básicos para trabajar con Información Geométrica. Por lo dicho hasta ahora pudiera parecer que las Tecnologías de la Información, la Informática, no es más que una parte de las Matemáticas. Algunos lo piensan así pero están totalmente equivocados. Es cierto que la Informática, quizás algo más que otras ciencias, tiene una gran base matemática; pero la Informática es Ingeniería.

Considero oportuno citar aquí al profesor Miguel Toro Bonilla, doctor en Ingeniero Industrial por la Universidad de Sevilla y catedrático del Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos de la Universidad de Sevilla [www17]:

“La diferencia entre un científico y un ingeniero se puede aclarar con la pregunta: ¿Qué se prefiere, construir artificios cuyo objetivo inmediato es resolver problemas de interés social o contribuir a saciar nuestro conocimiento, a saciar nuestra curiosidad, de cómo funcionan las cosas? El primer punto de vista es el del ingeniero el segundo el del científico. Una misma

persona puede actuar a veces como científico y a veces como ingeniero pero ambos puntos de vista son muy diferentes”.

Veremos en las aplicaciones que citaré, en las construcciones informáticas que señalaré, que todas ellas tienen una relación directa con el desarrollo social.

Acabábamos el apartado anterior disponiendo ya de algunos algoritmos y ¿ahora qué? Ya hemos indicado que los algoritmos anteriores han sido implementados adecuadamente. Probablemente muchas personas no hayan entendido este concepto, pero sin darse cuenta han seguido avanzado con la lección. Y esto no es posible. Gran parte del avance en el conocimiento de las cosas exige prioritariamente conocer el significado de todas y cada una de las palabras, de los conceptos nuevos, que van apareciendo. Es cierto que no estamos en una lección usual en la que se daría interacción entre docente y discente, pero les animo a que marquen aquí (y también lo hagan cuando asistan a cursos o conferencias en el futuro) esos elementos que desconocen; es un método indispensable para lograr una mejor y mayor inteligibilidad de lo que estamos leyendo o escuchando.

Implementar un algoritmo es hacer que sea ejecutable en un ordenador. Para ello necesitamos de lenguajes de programación, es decir, lenguajes que se puedan traducir a algo que el ordenador entienda.

Y aquí aparece claramente parte de la componente tecnológica de la Informática, es decir, necesitamos soluciones que nos permitan el uso práctico del conocimiento científico o teórico obtenido.



Figura 15. Ada Lovelace

Es importante señalar que la primera persona que hizo esto fue una mujer, Ada Lovelace, hija de Annabella Milbanke y Lord Byron (Fig. 15) [www04]. Su madre, Lady Byron, tenía formación matemática e insistió en que Ada estudiase también matemáticas, algo inusual por entonces. Ada conoció a Babbage en una fiesta en 1833 cuando ella tenía diecisiete años, y se quedó fascinada cuando éste le mostró sus trabajos. Aparcó algo sus estudios matemáticos por el matrimonio y la maternidad, pero los reanudó en cuan-

to pudo. En 1843 se publicó una traducción del francés de un artículo sobre la máquina analítica por un ingeniero italiano, Luigi Menabrea, al que Ada añadió extensas notas personales. Las notas incluyen la primera descripción publicada de una secuencia gradual de operaciones para resolver ciertos problemas matemáticos. Tal vez más importante aún, el artículo contenía declaraciones de Ada que desde una perspectiva moderna son visionarios. Ella especula que el motor 'puede actuar sobre otras cosas además de números (...) el motor podría componer piezas elaboradas y científicas de música de cualquier grado de complejidad o extensión'. La idea de una máquina capaz de manipular símbolos de acuerdo con las reglas y que los números podían representar entidades distintas de la cantidad, marcan la transición fundamental del cálculo a la computación. Ada fue la primera en articular explícitamente esta noción y en ese sentido avanzó más que Babbage. En su homenaje existe un lenguaje de programación denominado así, ADA.

3.1 Informática Gráfica

Un sistema gráfico es un sistema informático en el que predomina el aspecto gráfico de la información a tratar. Desde el punto de vista del sistema, el aspecto gráfico aparece en la Entrada (la información que se introduce al sistema es de carácter gráfico) o en la Salida (la información que genera el sistema es gráfica) o en el Proceso (es el proceso el que maneja información de carácter gráfico). En función de esto podemos distinguir diversos sistemas gráficos dependiendo de que la entrada o la salida, o ambas sean gráficas (sí suponemos que el proceso utiliza siempre información gráfica):

La definición anterior de sistema gráfico es más amplia que la considerada en los comienzos de los trabajos en Informática Gráfica.

		SALIDA			
		NUMÉRICA	GRÁFICA		
			GEOMÉTRICA	IMAGEN	
E N T R A D A	NUMÉRICA	Cálculo	Modelado	Presentación de Información	
	G R A F I C A	GEOMÉTRICA	Cálculo Geométrico	Procesamiento Geométrico	Modelado y Visualización
	IMAGEN	Extracción de Características	Reconocimiento de Formas	Tratamiento de Imágenes	

Figura 16. Sistemas Gráficos

En todo proceso gráfico se parte de una representación de la información a tratar. El modelado geométrico es la parte de la informática gráfica que trata de la forma de representar los modelos gráficos. Las técnicas de visualización se ocupan de obtener una imagen del modelo representado. Apoyando a las anteriores están las técnicas de interacción gráfica, que son el soporte para la entrada y edición de modelos gráficos en sistemas interactivos. Tal y como se observa en la figura 16 los campos de trabajo e investigación en Informática Gráfica son muy variados e interdisciplinarios.

La Informática Gráfica nos sirve tanto para la creación y edición de modelos, como para la representación y visualización de propiedades del modelo. Es clara la distinción entre el modelo y los medios gráficos usados para crearlo o visualizarlo. Como hemos indicado nuestro campo de interés se centra en los modelos geométricos: implican la existencia de una colección de componentes con una geometría bien definida y a menudo con interacción entre sus elementos: estructuras de ingeniería y arquitectura, modelos moleculares, estructuras geográficas, etc. El modelado asistido por ordenador permite, de un modo más económico y muchas veces más eficaz, el estudio de determinados fenómenos. Incluso en bastantes casos no sería posible dicho estudio si no es por medio del modelo computacional. La bondad de los datos obtenidos dependerá siempre de la buena elección y diseño del modelo elegido. Los modelos geométricos, en general, describen componentes con propiedades geométricas inherentes, por lo que es más evidente y necesario el uso de una representación gráfica. Varios son los elementos que deben estar presentes en un modelo geométrico:

- Representación espacial y forma de los componentes y demás atributos que corresponden a la presencia de los componentes (color, textura, ..)
- Conectividad de los componentes (estructura topológica) que ha de indicarse si no viene determinada intrínsecamente por su geometría.
- Datos de la aplicación específica y propiedades asociadas a las componentes.

Considero que está ocurriendo en el mundo de la Informática Gráfica algo parecido a lo que Negropontenos vaticinaba por medio de la paradoja de “los átomos a los bits” [Nig90]. Eran previsiones que más tarde se superaron ampliamente y algo parecido ocurrirá con lo aquí indicado. Es evidente el cambio que se está produciendo en nuestra sociedad por el uso ma-

sivo de los ordenadores y de las Tecnologías de la Información. En relación a lo que nos ocupa, cabe destacar el profundo efecto que sobre los gráficos se ha producido con los desarrollos tecnológicos, lo que ha implicado un gran renacimiento, en parcelas muy distintas, de todo lo relacionado con lo gráfico. Es sorprendente cómo la comunicación por medio de imágenes se está convirtiendo en la norma, frente a la excepcionalidad que suponía solo hace unos años. ¿Qué es lo que más ha influido para este renacimiento? Tres son los factores tecnológicos que de modo convergente han logrado contribuir a ello: el desarrollo de la Informática Gráfica, el desarrollo de las Tecnologías de la Información y el desarrollo de Internet.

La clave tecnológica es claramente la Informática Gráfica; es el motivo del por qué este desarrollo se está produciendo en estos momentos y no en otros. La Informática Gráfica está detrás de muchos de los nuevos avances actuales en Informática. Baste citar algunos ejemplos más relevantes: el desarrollo de los productos Multimedia y su integración en Internet; el fuerte impacto que está teniendo en muy diversos campos el desarrollo de la visualización científica e industrial; los nuevos campos que se están abriendo relacionados con la Realidad Virtual; las consecuencias en áreas muy diversas de las investigaciones y aportaciones actuales de la simulación y animación gráfica.

Para realizar lo anterior no hay que perder de vista la propia interdisciplinariedad de la Informática Gráfica entendida como disciplina, ya que toma fundamentos de campos tan dispares como la Psicología, en su aspecto de ciencia cognitiva; de las Ciencias de la Imagen, y en especial de la Física óptica; de las Matemática en general y la Geometría en particular; de la tecnología, de las artes y por supuesto de la Informática.

Podría argumentarse que es algo fuera de lugar y quizá la pretensión de alguien que por trabajar en un campo determinado, pretende hacer de él lo más importante. Los próximos años lo determinarán, pero estoy convencido que la preeminencia de lo gráfico hará que surjan nuevas aplicaciones y campos de estudio de las actuales disciplinas, al igual que la Informática ha provocado el surgimiento de nuevas ramas de las disciplinas tradicionales, especialmente en el campo de las matemáticas, base de muchos otros conocimientos (álgebra computacional, geometría computacional, topología computacional, etc.).

Sin pretender hacer un desarrollo exhaustivo de lo que ha supuesto la Informática Gráfica desde su nacimiento, sí parece necesario realizar un

breve bosquejo de modo que podamos entender lo que supone esta disciplina en la actualidad.

Es hacia el final de la segunda generación de ordenadores cuando aparecieron los primeros sistemas gráficos. En 1959 el primer ordenador gráfico, el DAC-1 (Design Augmented by Computers) fue creado por General Motors e IBM. Permitía al usuario introducir la descripción en 3D de un automóvil, y rotarlo y verlo desde diversas direcciones. Un brillante alumno del MIT terminaba por entonces su tesis doctoral. Este trabajo resultaría decisivo para el desarrollo de las aplicaciones gráficas del ordenador y contribuiría de forma decisiva al lanzamiento de la Informática Gráfica.

Aquel estudiante era Ivan Sutherland, quien después fundó la empresa Evans and Sutherland Corporation. Sutherland introdujo la idea de utilizar un teclado y un lápiz óptico para dibujar interactivamente una imagen en la pantalla del ordenador. Construyó imágenes utilizando el método de copiar componentes estándar (primitivas), añadiendo un punto tras otro para hacer líneas, y una línea tras otra para hacer figuras. Estas y muchas otras de las técnicas iniciadas por Sutherland siguen utilizándose hoy día. Más significativa aún que el método de generar imágenes, era la estructura de datos construida por Sutherland en el ordenador TX-2, diferente a todo lo que se había hecho hasta ese momento. Puede afirmarse que era la primera estructura de datos que contenía no solo la geometría del objeto, sino también su topología, es decir, que describía también con toda exactitud las relaciones entre las diferentes componentes del mismo. Antes de esto, las representaciones visuales de un objeto realizadas en el ordenador se habían basado en un dibujo y no en la descripción formal del objeto mismo. Con el sistema de Sutherland, denominado Sketchpad, se establecía una clara distinción entre el modelo representado en la estructura de datos y el dibujo que uno veía en pantalla. El sistema Sketchpad introducido en 1963, causó un gran revuelo en las universidades. Para aumentar su difusión, hizo un documental sobre el nuevo sistema, y envió una copia del mismo a todos los centros de Informática de Estados Unidos. Al tratarse esencialmente de un tema visual, la mejor manera de explicar las diferentes aplicaciones gráficas del ordenador era servirse de imágenes. La película mostraba unas técnicas con las que empezaban a familiarizarse millones de usuarios. A una de esas técnicas Sutherland le dio el nombre de “rubberbanding”. En ella, utilizaba un lápiz óptico para fijar un punto en la pantalla y luego, moviendo el lápiz, tendía una línea desde el punto inicial hasta la nueva posición

del lápiz. De este modo conseguía un control más preciso de la línea a dibujar, antes de fijarla definitivamente. Lo más interesante de todo era la demostración de que el ordenador podía calcular qué líneas eran las que definían la superficie frontal del objeto al tiempo que eliminaba el resto, que pasaba a quedar temporalmente oculto a los ojos del espectador. Las líneas ocultas estaban en la estructura de datos que definía el objeto, almacenadas en la memoria del ordenador, y volvían a aparecer cada vez que se giraba el objeto en la pantalla y se hacían visibles en la parte frontal. Las limitaciones del Sketchpad estaban más en el ordenador que en la idea como tal.

Varios puntos seguidos formarían una línea, pero con esto sólo se conseguía el esqueleto de los objetos de la imagen.

En 1966, Sutherland diseña el primer casco HMD (Head Mounted Display. Fig. 17). En él se visualizaban dos imágenes independientes en modo de alambre, una para cada ojo. Esto permitía que el usuario viera la escena en 3 dimensiones, ya que se simulaba el efecto estereoscópico.

El año decisivo para los sistemas gráficos informatizados fue 1980. Hasta entonces la mayoría de las aplicaciones gráficas habían sido dominio de científicos, matemáticos, ingenieros y expertos en Informática. En 1980 el mercado empieza a



Figura 17. El HDM diseñado por Sutherland

despegar y los sistemas gráficos informáticos se introducen en las retransmisiones televisivas, estudios de animación y en toda una variedad de industrias que tan sólo unos años antes apenas habían oído hablar de este medio. El espectacular crecimiento de la industria gráfica informatizada está recogido en las estadísticas ofrecidas por alguna de las firmas que trabajan en este campo. Por ejemplo, a finales de 1979 IBM lanzó su terminal en color 3279. Nueve meses después había recibido más de 10.000 pedidos, dos tercios de los cuales iban destinados a personas o entidades que utilizaban por primera vez el ordenador para la realización de tareas gráficas. Al año siguiente, el valor total de todos los servicios, sistemas y maquinarias relacionados con estas aplicaciones había alcanzado por primera vez la cifra de dos mil millones de dólares, todo ello en menos de dos décadas desde que Ivan Sutherland diseñara el sistema Sketchpad.

Puede decirse que la ACM (Association for Computing Machinery) es la asociación que junto a IEEE/CS (Institute of Electrical and Electronic Engineers- Computer Society) promueve la industria informática. Cuando aparecieron los primeros sistemas gráficos, ACM estableció los que se denominaría Grupo de Interés Especial en Gráficos, un pequeño y escogido grupo de expertos. En 1976, el grupo conocido por sus siglas, SIGGRAPH (Special Interest Group on Graphics), permitió por primera vez que acudieran expositores a su congreso anual. Fueron 10 empresas las que expusieron sus equipos y servicios. No obstante, tan solo 4 años más tarde, en 1980, las empresas participantes fueron 98 y cerca de 7.000 personas visitaron la exposición.

Para que la Informática Gráfica llegara al nivel que se encuentra actualmente fue necesaria una gran inversión en investigación y desarrollo. Ésta fue sufragada en gran medida por las industrias aeroespaciales, automovilísticas y armamentistas. La mayor parte del trabajo de investigación lo llevaron a cabo ciertas empresas y universidades americanas y, en un grado mucho menor, británicas. Entre las empresas que vieron desde un primer momento todo el potencial que ofrecía esta nueva aplicación de la Informática, más o menos en la misma época en que Sutherland daba a conocer su decisivo trabajo, se encontraban la Boeing, la Lockheed y la General Motors. Como ya hemos dicho, General Motors fue la primera empresa que utilizó un elaborado sistema gráfico creado por IBM.

Tal vez pueda parecer sorprendente que el primer gran centro de investigación en el campo de la informática aplicada a la creación de imágenes iba a establecerse en una pequeña Universidad del oeste de Estados Unidos. La Universidad de Utah vivió una auténtica edad de oro en lo que a la investigación académica se refiere; profesores y alumnos trabajaron juntos haciendo un descubrimiento tras otro en relación con los problemas que planteaba la generación de imágenes con ordenadores, produciendo unos resultados asombrosos. Siendo profesor en Berkeley, David Evans había visto el documental de Ivan Sutherland sobre el Sketchpad. Poco después, Evans aceptó el cargo de Director del departamento de Informática de la Universidad de Utah. Condicionado por el relativamente escaso presupuesto de aquella Universidad, Evans se vio forzado a concentrar todos los recursos con los que contaba su Departamento en una sola área de investigación. Su opción fue la Informática Gráfica aplicada a la creación de imágenes. Fichó a Sutherland en 1967, siendo aquí donde este perfeccionó el HMD

que previamente había inventado. Para los alumnos de esa universidad esta línea de investigación constituía una experiencia nueva y estimulante. Implicaba, sobre todo, trabajar en unos temas cuyo alcance desbordada con mucho los límites tradicionales de la informática. Por ejemplo, incluía el estudio de las leyes de la perspectiva, de la composición de la luz, y de la ciencia del color. Incluso la geometría podría integrarse con esta nueva línea de investigación. Durante esos años, los alumnos de Utah trabajaron día y noche hasta encontrar el modo de describir mediante el ordenador las formas y apariencias de los objetos. Uno de aquellos estudiantes era Ed Catmull. Su investigación estaba centrada en el descubrimiento de los modos de generar imágenes de superficies curvas, no de las formas regulares como esferas, conos o cilindros, sino de superficies que tuvieran formas arbitrarias. Para lograr su objetivo siguió el método de dividir cada superficie en zonas muy pequeñas cuya geometría podía modelarse matemáticamente en el ordenador. Una vez concluida, esta investigación resultó utilísima en campos tales como el diseño aeroespacial, en donde las superficies curvas en las alas y fuselajes constituyen la mayor parte del diseño. Junto a lo anterior, cabe destacar en su tesis el trabajo sobre texturas. Catmull pensó que si en el mundo real se pueden aplicar texturas y patrones, lo mismo se podría hacer en el ordenador. La aplicación de texturas es un método que toma una imagen bidimensional de la apariencia de un objeto y la aplica sobre el objeto tridimensional generado por el ordenador. El z-buffer, otra de sus grandes aportaciones, es una forma de eliminación de superficies ocultas que se basa en almacenar la información de profundidad para cada pixel de pantalla. Cada vez que se va a añadir un nuevo pixel a la imagen, se comprueba si el valor de profundidad desde el observador es mayor que el valor almacenado para ese pixel, y se sustituye si el valor guardado es mayor, ya que en ese caso el nuevo valor del pixel corresponde a un objeto más cercano y es visible para el observador. John Warnock, fundador de Adobe System, que revolucionaría el mundo de la publicación con su lenguaje de descripción de páginas que denominó PostScript, y Jim Clark, fundador de Silicon Graphics, fueron estudiantes de Utah. En 1974, Phong Bui-Toung desarrolló el modelo de sombreado que lleva su nombre. Anteriormente, en 1971, Henri Gouraud había presentado un método para simular la apariencia de una superficie curva, interpolando el color a lo largo de cada polígono.

Otro alumno de esa época era James Blinn, cuyas simulaciones de viajes espaciales realizadas para el Jet Propulsion Laboratory (Pasadena, California) fueron vistas en multitud de televisiones. Blinn abordó muchos de

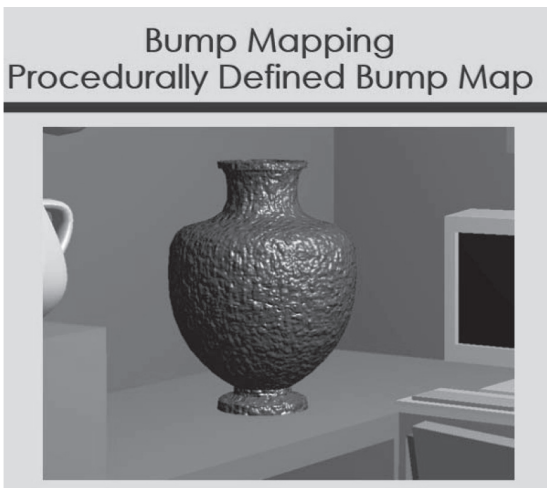


Figura 18. Técnicas avanzadas de texturización

mediante bloque de color compactos, creando así superficies que posteriormente recubriría con ciertas texturas para darles apariencia de realidad. Para aumentar el realismo, desarrolla las técnicas de “bump mapping” y “environment mapping” (ver fig. 18). Mediante la primera se simulan protuberancias sobre las superficies, usando combinaciones de las texturas con imágenes monocromas. Según el nivel de gris, así es la profundidad de la protuberancia. La segunda técnica consiste en crear texturas que reflejan el entorno que les rodea. Se generan 6 vistas diferentes (equivalentes a las seis caras de un cubo envolvente). Estas vistas se aplican simulando reflejar el entorno que rodea al objeto.

Tras el éxito de Utah, otras instituciones empezaron a interesarse por la Informática Gráfica. Entre ellas destaca el New York Institute of Technology. Uno de sus fundadores, Alexander Schure, fue el encargado de poner en marcha un ambicioso proyecto de investigación dotado con muchos millones de dólares denominado “The works”. Este era el título de un documental que Schure pensaba producir. El título procede del significado original de la palabra robot, procedente del checo, y quiere decir trabajos forzados. La película no se realizaría con los instrumentos cinematográficos tradicionales, tales como cámaras, luces y decorados, sino que estaría íntegramente generada por ordenadores. La tarea de los estudiantes era encontrar la forma de llevarla a cabo. Schure consiguió que diversos investigadores de Utah se trasladaran a este Instituto, convirtiéndose de hecho en el nuevo centro líder en Informática Gráfica.

los problemas más difíciles de la representación gráfica en el ordenador [www18]. Descubrió varias maneras de representar de forma realista objetos tridimensionales, técnicas conocidas con el nombre de modelado de superficies (surface modelling). Partiendo de un dibujo tridimensional que imitaba una estructura de alambres del modelo (wireframe), fue rellenado los polígonos de la estructura

Son muchos los avances y desarrollos que se han dado a partir de ahí hasta llegar a la situación actual. No es el momento de detallarlos todos. Pero sí considero imprescindible mencionar aquí al profesor Pere Brunet, catedrático del Departamento del Lenguajes y Sistemas Informáticos de la Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) y responsable del grupo de investigación en Modelado, Visualización e Informática Gráfica. Pionero en investigación en Informática Gráfica en España, fue Premio Nacional de Informática “García Santesmases” en 2010 por sus significativas aportaciones a la informática a lo largo de su trayectoria profesional. Su actividad investigadora en el campo de la informática gráfica se inició en 1979 y se ha centrado en el diseño geométrico asistido por ordenador, el modelado de sólidos, las representaciones geométricas jerárquicas y la realidad virtual, con aplicaciones como la geo-visualización, la simulación en monumentos relacionados con el patrimonio cultural y la visualización de volumen en el campo de la medicina.

También es necesario destacar aquí las aportaciones que el grupo de Informática Gráfica y Geomática de la Universidad de Jaén ha hecho en este campo y en especial en el modelado de sólidos [www01].

El modelado de sólidos es un conjunto de fundamentos matemáticos e informáticos para el tratamiento de sólidos tridimensionales. Los fundamentos de esta materia se han ido asentado a lo largo de los últimos años, habiendo adquirido actualmente una madurez adecuada. Aunque algunos autores la separan de la Informática Gráfica, personalmente considero que es una de sus más importantes componentes si entendemos la Informática Gráfica en sentido amplio. Los principales contenidos del Modelado de Sólidos son: fundamentos teóricos, representaciones geométricas y topológicas, algoritmos, sistemas y aplicaciones. Se distingue de otras áreas del modelado geométrico por su énfasis en la completitud de información, en la búsqueda de fidelidad física a los sólidos y la universalidad que busca en las representaciones. Vamos a continuación a realizar una descripción conceptual tanto de los fundamentos como de los aspectos más actuales del modelado, especialmente desde el punto de vista formal, siguiendo muy especialmente los diversos trabajos de Requicha, Rossignac y Shapiro que se encuentran indicados en la bibliografía [Req80], [RoO89], [ShV93].

En nuestro grupo de investigación hemos desarrollamos un marco formal unificado para el modelado de sólidos a partir del cual es posible obtener sistemas y algoritmos de representación específicas en estas represen-

taciones. Este sistema se define como un álgebra universal e incorpora una definición formal de las operaciones de modelado de sólidos fundamentales. Esta álgebra se puede utilizar para derivar los sistemas de representación específicas y podría ser utilizado para estudiar su equivalencia. La naturaleza formal del modelo se puede utilizar para demostrar la exactitud de los algoritmos. De hecho, el marco ha sido aplicado a la generación de varios sistemas de representación y para el desarrollo de algoritmos geométricos prácticos. Baste indicar, sin excesivo rigor matemático (que puede encontrarse en [Fe+14]), algunos fundamentos:

Para un cuerpo $\langle K, +, \cdot \rangle$ definimos una σ -álgebra (sobre K) como un conjunto $\langle A, +, \cdot, \cup, \cap, \sim, 0, 1, 1^u \rangle$ de objetos gráficos tal que:

- $\langle A, +, 0 \rangle$ es un grupo abeliano
- $\langle A, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ es un espacio vectorial sobre K
- $\langle A, \cup, \cap, \sim, 0, 1^u \rangle$ es un algebra booleana (el elemento vacío coincide con el elemento zero de K).

La inclusión de las diferentes operaciones se justifica ya que todos ellos se utilizan con frecuencia en el modelado geométrico y nos permitirá formalizar las operaciones de modelado.

Partiendo de la función $sign(x)$ (-1, 0 ó 1 según que x sea negativo, 0 ó positivo) y del volumen signado del tetraedro $Q_0Q_1Q_2Q_3$ (que sabemos es positivo si el triángulo $Q_1Q_2Q_3$ es visto en sentido antihorario desde Q_0), tenemos un teorema fundamental:

Teorema Todo objeto gráfico $Og \in \mathbb{R}^3$, cuya frontera es el conjunto de triángulos $\{t_i, i=1, \dots, n\}$ (siendo $t_i=Q_{i1}Q_{i2}Q_{i3}$) puede expresarse como:

$$O = k \cdot \sum_{i=1}^n (sign(Vol(S_i)) \cdot S_i \quad \text{with} \quad S_i = Q_0Q_{i1}Q_{i2}Q_{i3}$$

En el contexto del álgebra de objetos gráficos, el teorema anterior demuestra que todos los objetos definidos por mallas de triángulos se pueden expresar como una combinación de elementos muy simples.

Por lo tanto, con el álgebra de objetos gráficos podemos definir una versión extendida de CSG (E-CSG) que incluye todas las operaciones definidas en el álgebra. Podemos considerar que el teorema establece una demostración formal de la equivalencia entre la B-Rep y representaciones E-CSG para sólidos definidos por mallas de triángulos. Así mismo es posible

extender esta equivalencia a ciertos sólidos de forma libre partiendo de la definición de parche algebraico:

Definición: El *parche algebraico* $p(f_T)$ se define sobre el tetraedro T como la superficie $f_T=0$ dentro de T , siendo $f_T = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(\alpha_T)$, siendo n el grado del parche algebraico, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ una tupla de enteros no negativos, $B_\lambda^n(\alpha_T) = \frac{n!}{\lambda_1! \lambda_2! \lambda_3! \lambda_4!} \alpha_1^{\lambda_1} \alpha_2^{\lambda_2} \alpha_3^{\lambda_3} \alpha_4^{\lambda_4}$ los polinomios de Bernstein and b_λ el peso del punto de control λ . Es decir, si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ son las coordenadas baricéntricas de Q respecto de T : $p(f_T) = \{Q \mid f_T(Q) = 0 \text{ y } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \geq 0\}$.

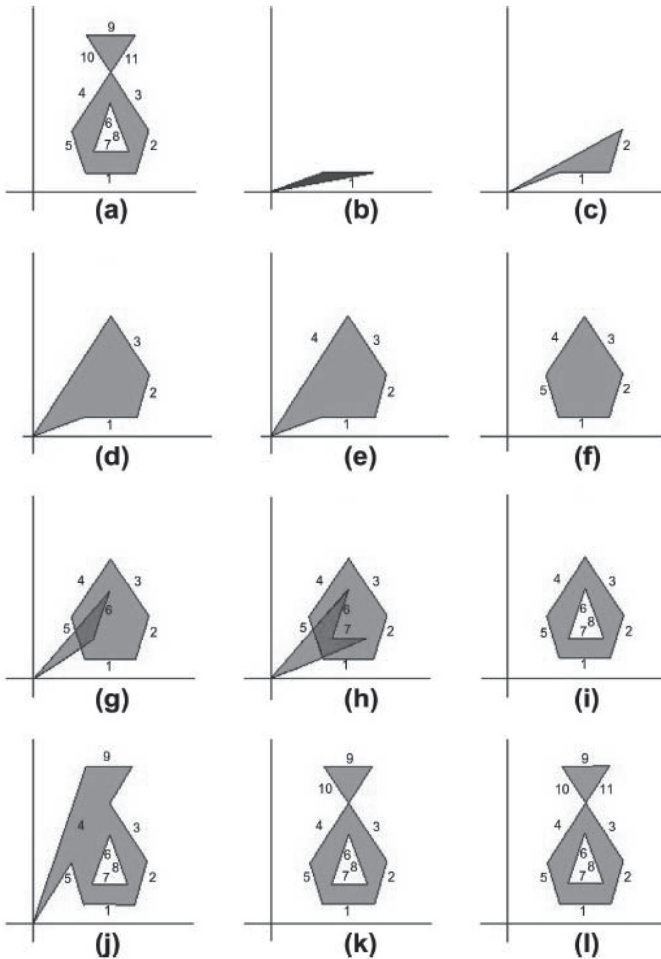


Figura 19. Aplicación del Teorema en 2D

A) Objeto

B) $-S_1$;

C) $-S_1 + S_2$;

D) $-S_1 + S_2 + S_3$;

E) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4$ (signo de S_4 0);

F) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 - S_5$;

G) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 - S_5 + S_6$;

H) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 - S_5 + S_6 + S_7$;

I) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 - S_5 + S_6 + S_7 - S_8$;

J) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 + S_5 + S_6 + S_7 - S_8 + S_9$;

K) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 + S_5 + S_6 + S_7 - S_8 + S_9 - S_{10}$;

L) $-S_1 + S_2 + S_3 + 0 \cdot S_4 + S_5 + S_6 + S_7 - S_8 + S_9 - S_{10} + 0 \cdot S_{11}$ (S_{11} con signo 0)

En L) tenemos otra vez el objeto. Y lo mismo funciona en 3D.

La figura 19 muestra un ejemplo del teorema aplicado a un objeto bi-dimensional. El modelo formal ha permitido desarrollar software capaz de realizar operaciones booleanas complejas con sólidos cuyas caras son triángulos.

La figura 20 muestra el desarrollo equivalente para sólidos cuyas caras son superficies, así como el esquema del software realizado. Uno de las utilidades que permite el software es la impresión de sólidos de forma libre

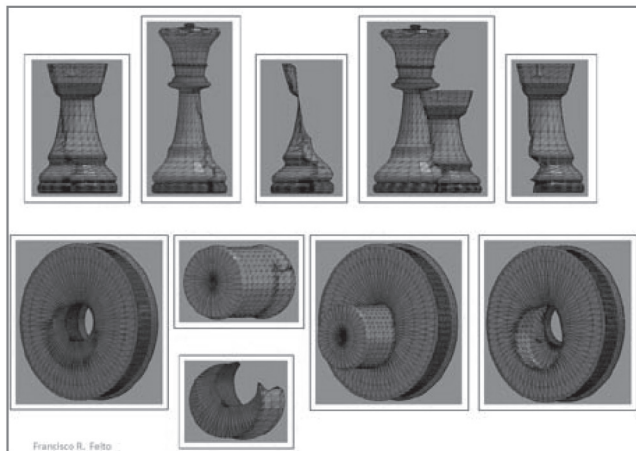


Figura 20. Operaciones Booleanas complejas

He comenzado este apartado diciendo que íbamos a presentar aplicaciones y parece que lo que he hecho es más formalismo. En cierto modo sí

pero las figuras nos indican que hemos hecho algo más (figura 21). Hemos desarrollado un software que está demostrado que funciona y que nos permite diseñar e imprimir objetos muy complejos. Sí, he dicho imprimir y esto ya suena mejor. Las impresoras 3D son ya esos aparatos que permiten fabricar casi cualquier cosa y con muchos tipos de materiales. En futuros viajes espaciales bastará llevar una impresora 3D, depósitos de materiales adecuados y un robot que permita ensamblar piezas para construir en el lugar de destino los aparatos necesarios.

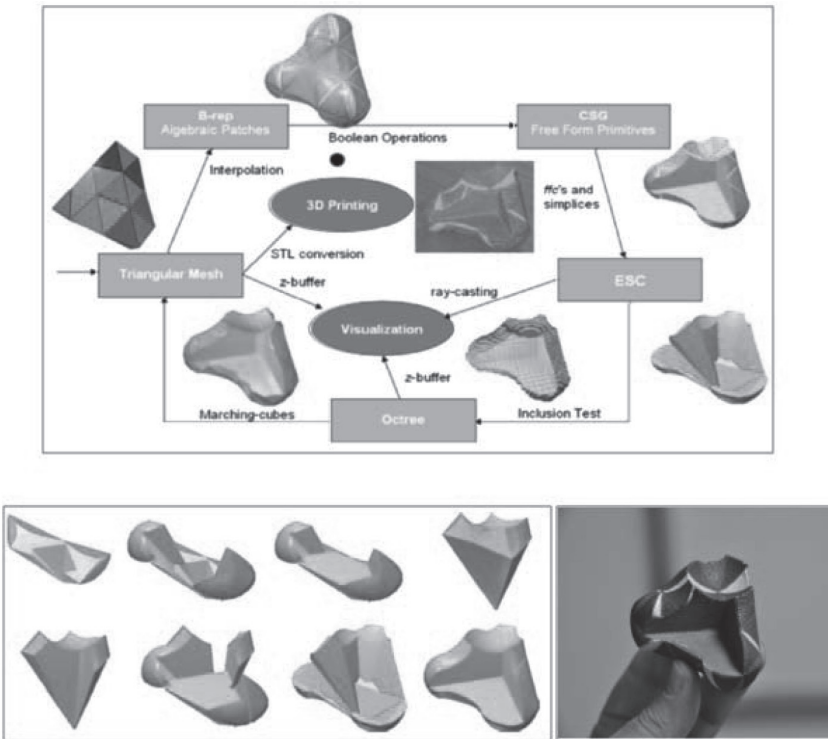


Figura 21. Esquema de las capacidades del software desarrollado

3.2 Geomática

En este último apartado vamos a describir brevemente, y sin entrar en aspectos formales, algunas de las aplicaciones de las TIG en el campo de la Geomática; esta disciplina aparece definida en el diccionario Oxford del modo siguiente: “The branch of science that deals with the collection, analysis, and interpretation of data relating to the earth’s surface”.

El término Geomática proviene del francés “géomatique” que procede de geo (tierra) e informática (información automática). El término aparece en Francia en 1970 en el Ministerio de Infraestructura y la Vivienda al constituirse la Comisión permanente de la Geomática.

Posteriormente fue utilizado (sin conocer el uso anterior) por Michel Paradis (especialista en fotogrametría que trabajaba para el Ministerio de Recursos Naturales de Canadá, en Quebec), que lo usó en sus notas con motivo del centenario del Instituto Canadiense de Topografía que posteriormente sería el Instituto Canadiense de Geomática. En 1986, el profesor DR. Pierre Gagnon del departamento de Topografía de la Universidad de Laval reconoció la importancia de este nuevo paradigma y desarrolló en esta universidad los estudios de Geomática (que reemplazaba a los estudios de Topografía). La Universidad también cambió el nombre del Departamento y de la facultad. En [Gro91] aparece una definición más completa².

Una de las aplicaciones más importantes de la Geomática es el desarrollo de los Sistemas de Información Geográfica y, cada vez más, de aquellos que trabajan con información espacial 3D (SIG3D). En los últimos años hemos comprobado la proliferación del 3D, y esto es lógico. El mundo es 3D y así se debe intentar modelar. El 3D no es solo algo bonito, interesante o deseable sino que es algo “esencial”. Accesos a cualquier lugar de la tierra, interacción con tiendas y negocios, turismo en la red, etc., son solo algunos de los campos en los que se requerirá el acceso y la gestión de información 3D. Hay que hacer notar, sin embargo, que el número de lugares y tiempos es muy grande, potencialmente infinito. Cuanto más cerca miramos el mundo, más detalles aparecen y así el mundo geográfico es infinitamente complejo. Para abordar este problema hemos desarrollado caminos ingeniosos. Los SIG3D usan muchos métodos para crear representaciones o modelos de datos que “simplifican” la realidad. Partiendo de los datos a nuestro alcance debemos llegar a representaciones lo más sencillas posibles pero útiles en relación al objetivo que persigamos.

En la Figura 22 se contiene una definición sencilla de SIG (que sirve también para los SIG3D). Los avances que se están produciendo en estas tecnologías están permitiendo que cada día se pueda trabajar con modelos

² “Geomatics is the science and technology dealing with the character and structure of spatial information, its methods of capture, organization, classification, qualification, analysis, management, display and dissemination, as well as the infrastructure necessary for the optimal use of this information”.

3D más cercanos a la realidad que se intenta modelar.

En particular son herramientas fundamentales en el desarrollo de las tecnologías relacionadas con la modelización urbana y las ciudades inteligentes [ROF12], [DGF12], [Bat13], [www19].



Figura 22. Definición de SIG

Estas tecnologías nos permiten obtener mapas en todas las escalas; o más bien podríamos decir que el concepto de escala se transforma en un concepto de aproximación, del nivel de detalle con que hayan sido obtenida o generada la información geométrica. El famoso autor Lewis Carrol quizás ya intuía algo de esto. En su novela *Silvia y Bruno* [Car02], en el capítulo *El hombre de la luna, nos presenta* el siguiente diálogo:

- ‘Esa es otra cosa que hemos aprendido de *vuestra* Nación’, dijo Mein Herr, ‘el arte de hacer mapas. Pero lo hemos desarrollado mucho más que vosotros. ¿Cuál es para ti el mapa más *grande* que sería de verdad útil?’
- ‘Sobre seis pulgadas por milla.’

- ‘¡Solo *seis pulgadas!*’ exclamó Mein Herr. ‘Nosotros muy pronto superamos las seis *yardas* por milla. Entonces probamos con *cien* yardas por milla. ¡Y finalmente llegamos a la idea más fabulosa de todas! ¡Realizamos un mapa del país, con la escala de una *milla por milla!*’
- ‘¿Lo habéis utilizado mucho?’ pregunté.

- ‘Nunca ha sido desplegado todavía’ dijo Mein Herr, ‘los granjeros se opusieron. Ellos dijeron que cubriría completamente el país, ¡y no dejaría pasar la luz del Sol! Así que ahora utilizamos el propio país, como su propio mapa, y te aseguro que funciona casi tan bien.’

Y de nuevo Lewis Carrol nos lleva al otro extremo, en su canto segundo de *La Caza del Snarck* [www20]

*“Al capitán todos le ponían en el alto candelero.
¡Qué porte, qué soltura y qué gracia!,
y ¡tan solemne también! Cualquiera podía ver que
era un sabio sólo con mirarle a la cara.*

*Había comprado un gran mapa que representaba el mar
y en el que no había vestigio de tierra;
y la tripulación se puso contentísima al ver
que era un mapa que todos podían entender.*

*“¿De qué sirven los polos, los ecuadores,
los trópicos, las zonas y los meridianos de Mercator?
Así gritaba el capitán. Y la tripulación respondía:
“¡No son más que signos convencionales!”*

*“¡Otros mapas tienen formas, con sus islas y sus cabos!
¡Pero hemos de agradecer a nuestro valiente capitán
el habernos traído el mejor —añadían—,
uno perfecto y absolutamente en blanco!”*

Evidentemente no es posible hacer un sistema que contenga los casi infinitos puntos de la Tierra; de modo similar **algo, o alguien, que sólo aporte la nada, no sirve para nada.**

Hace ya unos años se constituyó un consorcio de universidades para la Ciencia de la Información Geográfica (CIG), el UCGIS (www.ucgis.org) con el objetivo de proponer ciertas prioridades en cuanto a la investigación en CIG, y colaborar en la expansión y aplicabilidad de su desarrollo. No se trataba, por supuesto, de olvidar los SIG, sino de trascenderlos y considerarlos unas herramientas imprescindible dentro de un marco más amplio. Se determinaron diez tópicos: - Adquisición e integración de datos espacial; - Computación distribuida; - Extensión de las representaciones geográficas; - Aspectos cognitivos de la información geográfica; - Interoperabilidad de la información geográfica; - Escalas; - Análisis espacial en entornos SIG; - Infraestructuras de datos espaciales; - Incertidumbre en los datos geográficos y en el análisis basado en SIG; - Sociedad y SIG.

Al objeto de integrar todos los campos anteriores y entender mejor el conjunto de aplicaciones de los SIG3D puede servirnos de modelo la Figura 23. En dicha figura aparece un posible paradigma para los SIG, denominado Tetraedro SIG, en el que se intenta remarcar los diversos elementos que configuran un sistema de este tipo a la vez que nos facilita entender mejor sus posibilidades.

La base de este tetraedro está constituido por la plataforma más tecnológica: tecnologías, procesos y entorno. El objetivo (indicado por el vértice superior) es la generación de geoconocimiento, y en el caso que nos ocupa, de geoconocimiento aplicado a otras disciplinas. Pero no es posible que esto funcione sin un núcleo, sin un contenido claro: los datos. A partir de ellos se genera información para cubrir el objetivo principal. Dicho geoconocimiento debe ser capaz de apoyar una adecuada toma de decisiones en todos los proyectos relacionados con entornos geográficos

A la vez, es importante señalar algo que se olvida con frecuencia. El entorno humano es fundamental para que la herramienta sea útil. No basta con conocimientos superficiales, sino que son necesarios especialistas en SIG que trabajen coordinados con otros científicos e ingenieros. Es por tanto necesario asegurar siempre, en todo proyecto, la debida interdisciplinariedad, aunque sin olvidar la característica de herramienta de los SIG3D. Así, por ejemplo, en nuestro grupo hemos obtenido resultados relacionados con la producción de aceite o con la erosión en terrenos de olivar (en colaboración con el grupo del Dr. D. Antonio Gil Cruz, catedrático de Universidad del Área de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría en la Universidad de Jaén) [Al+12], [Ra+08].

Y junto a los responsables del uso y gestión de estas herramientas es también muy importante llegar adecuadamente a las personas a los que afectarán estas tecnologías. No podemos olvidar que estas herramientas tienen por objetivo servir al desarrollo humano en todos sus sentidos. Recientemente ha cobrado mayor atención la relación entre el contexto geográfico y los entornos en los que se producen los procesos sociales relacionados con grupos e individuos. Aunque las herramientas metodológicas indicadas son relativamente nuevas, el pensamiento espacial ha estado durante mucho tiempo en el centro de gran parte de la teoría sociológica tradicional que marca las bases de la disciplina. Estos fundamentos teóricos, junto con la

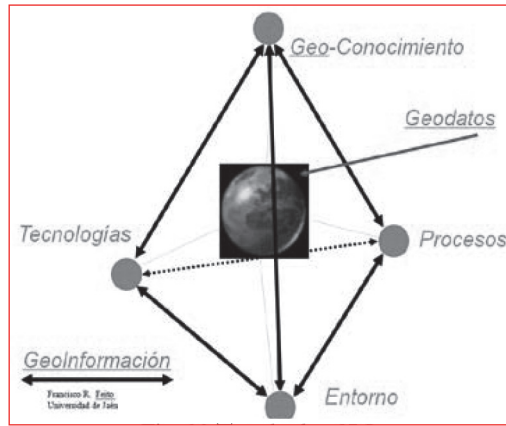


Figura 23. Tetraedro SIG.

capacidad metodológica más reciente de poner “la gente en su lugar,” comprenden un movimiento emergente hacia una sociología geográficamente concentrada. Edward Hayes ya en 1908 introduce el término “sociología geográfica”; a lo largo de más de 100 años de desarrollos teóricos y metodológicos, se han ido formando grupos de trabajo en relación a una sociología moderna de la ubicación. Se trata en última instancia de unificar la teoría y los métodos de la sociología, cuando se orientan al examen de los comportamientos humanos y los procesos de población en su contexto espacial determinado.

Trabajando con el grupo del profesor Felipe Morente, catedrático de Sociología de la Universidad de Jaén, estamos avanzando en este campo, denominado Geosociología, y aportando ya algunos resultados [Cu+14]; seguro que en breve estos trabajos darán más frutos.

Junto a lo descrito hasta aquí, cabe destacar otra aplicación importante de la Geomática muy relacionada con Jaén. Se trata de un gran proyecto sobre la Catedral de Jaén: su completa modelización en 3D, y posterior difusión. Bajo la dirección del grupo TIC144, con el patrocinio del Cabildo de la Catedral, de la Universidad de Jaén, del Ayuntamiento de Jaén y de la Junta de Andalucía, comenzamos dicho proyecto, en colaboración con el grupo de Informática Gráfica de la Universidad de Granada, dirigido por el profesor Dr. D. Juan Carlos Torres Cantero, Catedrático de dicha Universidad, y Virtum Graphics, empresa spin-off de la Universidad de Granada. Se trataba de iniciar la modelización mediante el uso de sus escáneres.

Es frecuente el uso del término “escaneado láser” para referirse a la digitalización de objetos mediante el uso de dispositivos láser avanzados. Mediante esta tecnología es posible la adquisición de millones de puntos



Figura 24. Vista de la Catedral de Jaén

geométricos 3D correspondientes a un monumento concreto. Cuando esto se realiza desde diversos lugares es posible una reconstrucción geométrica completa del objeto que además se ve completada con información de color. A partir de la información capturada y mediante complicadas operaciones es posible llegar a obtener información compleja del monumento.

Es evidente que la obtención de la información global de la Catedral de Jaén supondría la propuesta de un proyecto de gran envergadura, tanto en la vertiente tecnológica como en la artística, que requeriría además de un presupuesto muy elevado. Sin embargo, lo que se planteó fue obtener una aproximación que pudiese permitir en su día la consecución del proyecto global en caso de contar con el mecenazgo adecuado.

Una vez estudiado el modelo a digitalizar, se planteó como objetivo realizar una primera intervención sobre la fachada, tratando de conseguir el modelo más completo posible, pero con la finalidad de estudiar los problemas de la aplicación de esta tecnología a este tipo de edificaciones, así como realizar una georreferenciación exacta del modelo.

Se usó un Escáner láser terrestre 3D-RIEGL-LMS-Z420i de alto rendimiento con las siguientes características: Láser clase 1 con longitud de onda en el infrarrojo cercano, Rango de medida hasta 1000 m en objetivos naturales con reflectividad superior al 80% y hasta 350 m en objetivos naturales con reflectividad superior al 10%. La precisión es de 10 mm a 50 metros con una repetibilidad de hasta 4 mm. El campo de visión posible es de 80° x 360° y el ratio de medida hasta 12000 puntos/seg.



Figura 25. Escáner RIEGL

En [www21] puede encontrarse abundante información sobre diversos aspectos de “The Digital Michelangelo Project” que sirve de orientación para entender mejor lo que se pretende realizar, y los posibles resultados que se podrán obtener.

En este primer trabajo sobre la Catedral se trataba de disponer de un modelo 3D detallado de parte de la fachada, y de la plaza con distintas tomas. Además, este modelo se georreferenciaría para conseguir tener un modelo lo más exacto posible, en cuanto a posición y orientación, respecto al original, y además se compararía con los modelos de baja resolución que pudieran encontrarse, para demostrar la validez de los mismos.

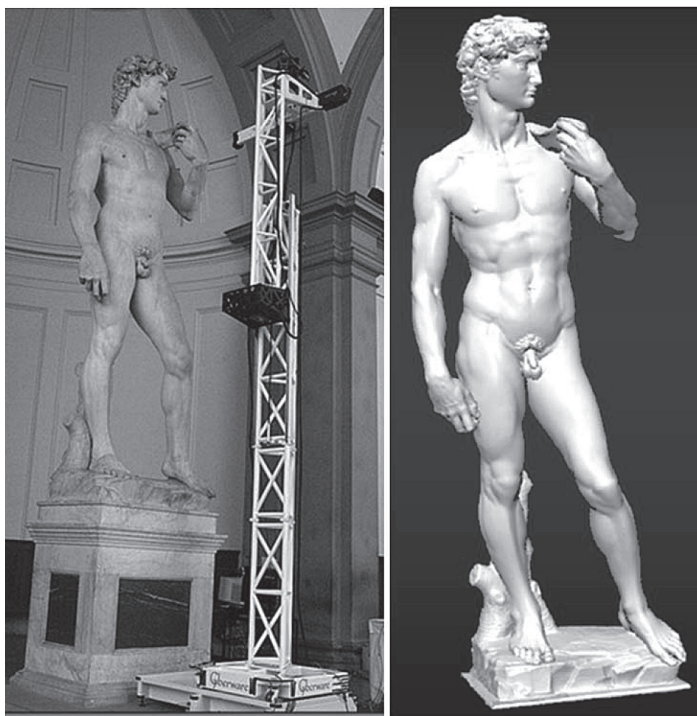


Figura 26. The Digital Michelangelo Project

El modelo escaneado fue procesado para generar mallas de triángulos procesables con 3D Studio Max o cualquier aplicación de modelado 3D por ordenador. Se adquirieron tomas que cubrieron completamente la superficie del modelo, siguiendo el plan de escaneado establecido. El proceso se realizó en modo detallado con fotografías de alta resolución que servirían después para incorporar textura al material del modelo. En el momento del escaneado se realizaron modificaciones puntuales sobre el plan original, y se realizaron las tomas necesarias para intentar completar el modelo de la mejor manera posible (si bien no era el objetivo final que el modelo quedara totalmente registrado). En este proceso ya se usó un escáner propiedad de la Universidad de Jaén (Leica Scanstation C10).

La etapa más laboriosa del proceso es el procesamiento de las nubes de puntos capturadas con el escáner y la reconstrucción del modelo 3D. Este procesamiento consiste en la triangulación, registrado y fusión de las distintas tomas.

Del modelo obtenido tras la fase anterior, se generaron versiones con diferentes niveles de detalle que se exportaron a diversos formatos estándar.

res para representación de modelos de mallas 3D, lo que permitirá su utilización posterior con cualquier software comercial. Una vez simplificado el modelo, es posible tratarlo para obtener diversas representaciones virtuales del mismo, así como animaciones para mostrar con detalle el modelo obtenido.

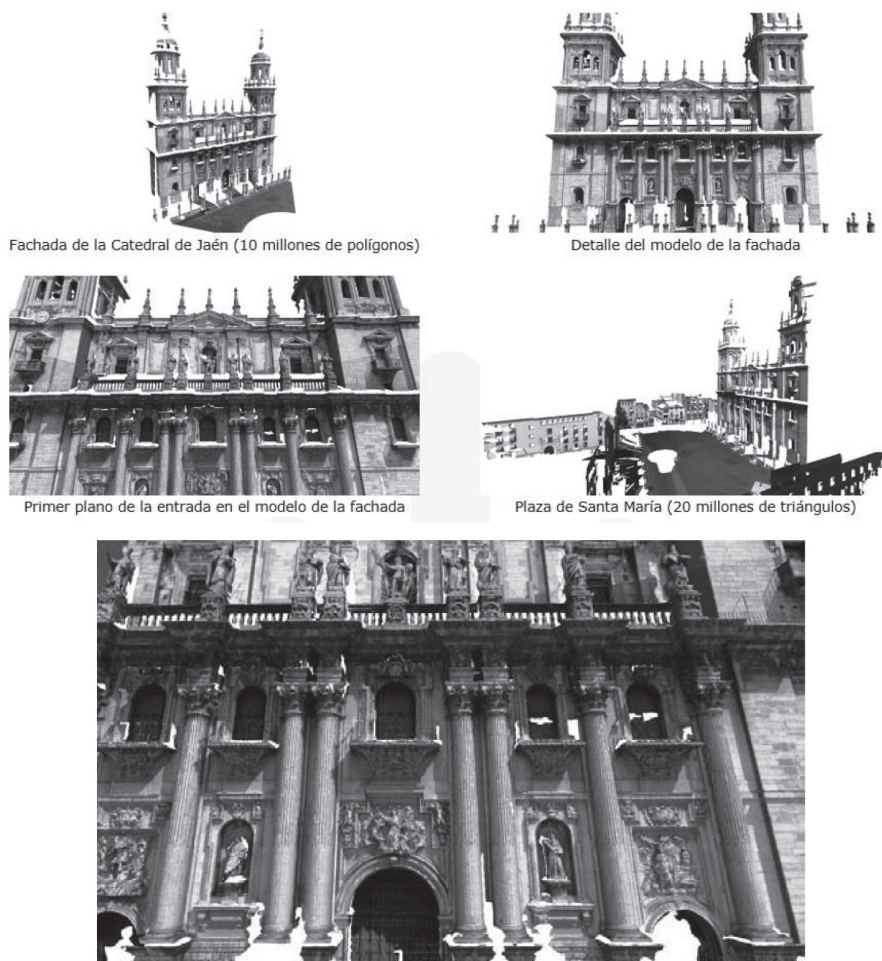


Figura 27. Resultados obtenidos con el escáner

Este último año hemos seguido avanzando con la ayuda de la Diputación de Jaén, por medio de un proyecto del Instituto de Estudios Gienenses, liderado por la profesora Dra. Dña. Inmaculada Barroso, del grupo de investigación SEJ-311. En él intervienen además profesores de otros

grupos de investigación de la Universidad de Jaén (TIC-144, TEP-213 y HUM-573). Como se ha indicado anteriormente se pretende la difusión adecuada de la información obtenida mediante el desarrollo de un prototipo de portal web.

En breve tiempo esperamos poder presentar los resultados obtenidos hasta ahora. Parte de ellos son accesibles en: <http://www.jaen3D.org>

Como he indicado, es un proyecto complejo y muy costoso, aunque esperamos seguir contando con la adecuada colaboración de instituciones públicas y privadas para su desarrollo.

CONCLUSIONES

Tal y como decía al comienzo, creo haber logrado presentar algunas características de las Tecnologías de la Información Geométrica, cómo se adquiere así como la forma en que es posible diseñar algoritmos para su gestión. Del mismo modo, he presentado detalles de algunas de las múltiples aplicaciones en las disciplinas de Informática Gráfica y Geomática. Todo ello nos permite ver tanto realidades presentes, que nos están facilitando la vida, como desarrollos futuros que deben tener el mismo fin.

Y espero haber conseguido en cada uno de los presentes algo que para mí es tan importante como conocer una disciplina **y es saber lo que no conocemos de dicha disciplina**, ya que este será el único camino para avanzar en nuestro conocimiento. La Ciencia y la Ingeniería son ya hoy día totalmente interdisciplinares.

He hablado al principio de docencia e investigación. También de que en estos dos campos hemos de buscar la excelencia. Recordando el cuento de la tienda de sueños, me gustaría no ser lo suficientemente joven para soñar sólo con lo que he perdido, ni lo suficientemente viejo para soñar sólo con lo que no he alcanzado. ¿Y qué sueños tengo para mi Universidad? Sueño con:

- Una Universidad de Jaén reconocida internacionalmente por sus aportaciones en las áreas de Aceite de Oliva (y quien sabe si en el futuro alguien podría sorprendernos con un premio Nobel en algún área relacionada) y en Arqueología Ibera, apoyados estos campos por una investigación de vanguardia en Informática y Telecomunicaciones.

- Una Universidad de Jaén que busca un desarrollo cada día más humano y sostenible y por ello aporta a nuestro entorno más cercano y también a zonas más lejanas grandes avances en Energías Renovables y en Ecología y Medio Ambiente.
- Una Universidad de Jaén que sabe descubrir y apoyar a investigadores excelentes, que en cualquiera de las cinco grandes áreas (Ciencias, Salud, Humanidades, Ingeniería ó Ciencias Sociales y Jurídicas), la representarán en todo el mundo.
- Unas Escuelas de Ingeniería (perdónenme esta querencia) líderes en investigación y docencia y al servicio del desarrollo, y muy especialmente del desarrollo industrial de toda nuestra provincia.
- Un profesorado excelente, al servicio de su Universidad de Jaén, que hará que ésta sea cada día más reconocida por todos sus estudiantes y por toda la sociedad (cerca y lejana) por su docencia de calidad.
- Un personal de Administración y Servicios excelente que se sepa indispensable y necesario, pero a la vez consciente de su labor de servicio a toda la comunidad universitaria, para colaborar en alcanzar esos sueños ya señalados.
- Unos estudiantes excelentes, jóvenes unos, con toda la vida por delante y viviendo a la vez su vida plenamente, que desean que su universidad sea la mejor del mundo, y que junto al estudio, ponen el servicio a los demás como motor de su existencia; y otros algo más maduros, que vienen a buscar lo que siendo jóvenes no pudieron obtener o que vuelven para mantenerse al día y ampliar sus conocimientos, y que seguro nos aportarán más de lo que obtengan.

¿Sólo sueños? ¿Lo podemos conseguir? Estoy plenamente convencido: Sí; pero solos no. Necesitamos que toda la sociedad, y muy especialmente la sociedad giennense aquí representada, no sólo nos apoye con palabras, sino con hechos concretos, y que a la vez sepa liderar, todos a una, acciones claras y rotundas que exijan ante todas las autoridades competentes los medios imprescindibles que necesitamos y que muchas veces nos regatean.

¿Quizás sueño con demasiada excelencia? Sí y no. Para cada uno esta palabra puede tener significados diferentes. En mi caso intento tener presente, al menos, los pensamientos de dos investigadores de campos teóricamente muy distintos. El primero, el gran Matemático G.H. Hardy quien describe

sus sentimientos al final de su carrera docente e investigadora³; el segundo, un gran metafísico español actual, el Profesor Alejandro Llano, cuyos escritos me han hecho considerar la grandeza de una verdadera vida:

“La índole dinámica de mi ser se revela en la necesidad de avanzar hacia el encuentro con los demás, hacia más allá de lo que soy ahora, para lograr la propia identidad que, por lo demás, nunca será plena....

La excelencia a la que aspiro no es la del completo acabamiento. Es seguir buscando lo bueno de la mejor manera que esté a mi alcance. Potenciar lo más posible mi ser práctico, para que mi capacidad operativa crezca acumulativamente. Una concepción estática y terminal de mi excelencia la convertiría en algo odioso para los demás e incluso para mí mismo. Para los demás sería la mayor falta de modestia, ya que aspiraría a presentarme como un modelo. Para mí supondría abocarme a la desesperanza, al proponerme algo inalcanzable. Paradójicamente, la excelencia excluye el perfeccionamiento total” [LLa02].

Acabamos por hoy, pero CONTINUAREMOS.

³ “The case for my life, then, or for that of any else who has been a mathematician in the same sense in which I have been one, is this: that I have added something to knowledge, and helped others to add more; and that these somethings have a value which differs in degree only, and not in kind, from that of the creations of the great mathematicians, or of any of the other artists, great or small, who have left some kind of memorial behind them” [Har40].

AGRADECIMIENTOS

Son muchas las personas que deberían aparecer aquí, pero creo que como siempre es posible olvidar a alguien, dense todos ellos por agradecidos. De todos modos, ya he comentado que considero la investigación como algo imprescindible en una Universidad, y toda investigación al final es labor de equipo. Cierto que hay un responsable, pero no lo veo como el vértice de un pirámide, sino como un director de orquesta, importante sí, pero siempre junto a su orquesta para obtener muy buenos resultados.

Por ello es mi obligación (además de mi deseo gustoso) agradecer a los profesores de la Universidad de Jaén de mi grupo, su ánimo y apoyo a lo largo de estos veinte años: Rafael J. Segura, Juan Ruiz de Miras, Marilina Rivero, Antonio J. Rueda, Lidia Ortega, Juanjo Jimenez, Angel L. García, Carlos Ogayar, Roberto Jiménez, Francisco de Asís Conde, José L. de la Cruz, Andrés Molina.

Agradecimiento también a los demás miembros del grupo, pasados y presentes (que prefiero no citar porque seguro me olvidaría de alguno), y a todos aquellos que en el futuro deseen trabajar en este campo tan apasionante, y que a la vez servirá para la gran aventura de llevar nuestra Universidad de Jaén por todo el mundo.

BIBLIOGRAFÍA

- [Al+79] Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.n., Laurentiev, M.A. y otros. *La Matemática: su contenido, métodos y significado*. Ed. Alianza Universidad, 1979.
- [Al+12] Alamo, S., Ramos, M.I., Feito, F.R., Cañas, “A. Precision techniques for improving the management of the olive groves of southern Spain”. *Spanish journal of agricultural research*. 583-595. 2012.
- [Bai07] Bain, K. *Lo que hacen los mejores profesores universitarios*, Servicio de Publicaciones Universidad de Valencia, 2007.
- [Bat13] Batty, M. *The New Science of Cities*. Ed. MIT Press. 2013
- [Ber00] Berlinski, D. *The Advent of the Algorithm: The 300-Year Journey from an Idea to the Computer*. Ed. Harcourt, 2000.
- [Ber13] Berlinski, D. *The King of Infinite Space: Euclid and His Elements*. Ed. Harcourt, 2013.
- [Car02] Carrol, L. *Sylvia y Bruno*. Ed. Edhasa . 2002.
- [Cru**] Cruz, J.L. de la. *35 Años de Instrumentos Topográficos*, Ed. Editorial Académica Española, 2014.
- [Cu+14] Cubillas, J.J., Ramos, M.I., Feito, F.R., Ureña, T. “An Improvement in the Appointment Scheduling in Primary Health Care Centers Using Data Mining”, *J. Medical Systems* 38(8) (2014)
- [deG06] De Guzman Ozámiz, M. *Aventuras Matemáticas*, Ed. Pirámide, 2006.
- [DLB98] Davenport, T.H., De Long D.W, y Bees, M.e. “Successful knowledge management projects”, *Sloan Management Review*, Winter. 1998

- [DGF12] Dominguez, B., García, A.L., Feito, F.R. “Semiautomatic detection of floor topology from CAD architectural drawings”. *Computer-Aided Design* 44(5): 367-378 (2012).
- [Fe+14] Feito, F. R.; Ruiz de Miras, J.; Rivero, M., Segura, R.J.; Torres, J.C. “From theoretical graphic objects to real free-form solids”. *Information Science*. 269: 73-93 (2014).
- [FTU95] Feito, F.; Torres, J.C.; Ureña. A. “Orientation, Simplicity and Inclusion Test for Planar Polygons”. *Computer & Graphics*. 19(4) 595/600. 1995.
- [GRF11] García, A.L., Ruiz de Miras, J., Feito, F.R. “Evaluation of Boolean operations between free-form solids using extended simplicial chains and PN triangles”. *The Visual Computer* 27(6-8): 531-541 (2011).
- [GoS11] Gómez Vieites, A. y Suarez Rey, C. *Sistemas de Información. Herramientas prácticas para la gestión empresarial*. 4º Ed. Ed. Rama, 2010.
- [Gro91] Groot, R. “Education and Training in Geomatics in Canada: A discussion Paper”. *CISM Journal ACSGC*, 45(3), 365-382 (1991).
- [Har40] Hardy, G.H., *A Mathematician’s Apology*, Cambridge University Press. 1940.
- [Het81] Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematic, Vol I and II*. Ed. Dover, 1981.
- [JFS09] Jimenez, J.J. ;Feito,F.R.; Segura, R.J: “A new hierarchical triangle-based point-in-polygon data structure”. *Computers & Geosciences* 35(9): 1843-1853 (2009)
- [Lla02] Llano, A. *La vida Lograda*. Ed. Ariel, 2002
- [Man97] Mandelbrot, B. *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Ed. Tusquets. 1997.
- [Mar12] Martínez Caro, D. *El yo y la máquina. Cerebro, mente e inteligencia artificial*. Ed. Palabras. 2012
- [Nig90] Nigroponte, N. *Ser Digital*, Ed. Atlantida, Buenos Aires 1995.
- [Og+07] Ogayar, C.J., Rueda, A.J., Segura, R.J., Feito, F.R. “Fast and simple hardware accelerated voxelizations using simplicial coverings”. *The Visual Computer* 23(8): 535-543 (2007).
- [OrF05] Ortega, L.M, Feito, F.R. “Collision detection using polar diagrams”. *Computers & Graphics* 29(5): 726-737 (2005).
- [Pen96] Penrose, R. *La Nueva Mente del Emperador*. Ed. Grijalbo, 1996.

- [RA+90] Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, *Vocabulario Científico y Técnico*, Ed. Espasa Calpe.1990.
- [Req80] Requicha, A.A.G. “Representation of Rigid Solid: Theory, Method and Systems”. *Computer Surveys of the ACM*, 12(4), 437-465. 1980.
- [Ra+08] Ramos, M.I., Feito, F.R., Gil, A.J., Cubillas, J.J. “A study of spatial variability of soil loss with high resolution DEMs: A case study of a sloping olive grove in southern Spain”, *Geoderma*, 148(1), 1-12 (2008).
- [ROF12] Robles-Ortega, M.D., Ortega, L.M., Feito, F.R. “Design of Topologically Structured Geo-database for Interactive Navigation and Exploration in 3D Web-Based Urban Information Systems”, *Journal of Environmental Informatics*, 19(2), 79-92, 2012.
- [RoO89] Rossignac, J. and O’Connor, M. “A dimension-independent Model for Poinsets with Internal Structures and Incomplete Boundaries”. In *Geometric Modeling for Product Engineering*. M Wozny, J. Turner, K Preiss, eds. North Holland, 145-180. 1989.
- [RuF11] Rueda, A.J., Feito, F.R., “EL-REP: A New 2D Geometric Decomposition Scheme and Its Applications”. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graph.* 17(9): 1325-1336 (2011).
- [RuF99] Ruiz de Miras, J., Feito, F.R. “Inclusion Test for Free-Form Solids”, *Computers & Graphics*, 23(2), 1999.
- [Sav14] Savage, N. “General Agreement”, *Communications of the ACM*, 57(6), pg. 23 2014.
- [Se+05] Segura, R.J., Feito, F.R., Ruiz de Miras, J., Ogayar, C.J., Torres J.C. “An Efficient Point Classification Algorithm for Triangle Meshes”. *J. Graphics Tools* 10(3): 27-35 (2005).
- [ShV93] Shapiro, V. and Vossler, D.L. “Separation for boundary to CSG conversion”, *ACM Transaction on Graphics* 12 (1), 35-55. 1993.

(Direcciones web accedidas por última vez el 25 de Agosto de 2014)

- [www01] <http://gggj.ujaen.es>
- [www02] <http://dicits.ugr.es/rankinguniversidades>
- [www03] <https://www.youtube.com/watch?v=5b5BDoddOLA#t=34>
- [www04] <http://www.computerhistory.org>

- [www05] <http://www.famousscientists.org>
- [www06] <http://www.epsilones.com/paginas/historias/historias-006-frege-russell.html>
- [www07] <http://www.rae.es/recursos/diccionarios/drae>
- [www08] <http://www.britannica.com>
- [www09] <http://www.mcescher.com>
- [www10] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Konigsberg.html>
- [www11] <http://en.algoritmy.net>
- [www12] <http://mathworld.wolfram.com/RhindPapyrus.html>
- [www13] http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm
- [www14] <http://abrahamlincolnonline.org/index.html>
- [www15] <http://www.mathcomp.leeds.ac.uk/turing2012>
- [www16] http://docs.oracle.com/html/A88805_01/sdo_intr.htm#884341
- [www17] <http://blogmigueltoero.blogspot.com.es/2013/09/la-informatica-ciencia-o-ingenieria.html>
- [www18] <http://www.jimblinn.com>
- [www19] <http://www.smartcityjaen.com>
- [www20] <http://www.biblioteca.org.ar/libros/130165.pdf>
- [www21] <https://graphics.stanford.edu/projects/mich>



Servicio de Publicaciones